Le calcul tensoriel

La connaissance est le patrimoine de l'humanité, donc chaque être humain peut l'utiliser librement mais il a aussi le devoir de le protéger, partager, améliorer.

Morphocode CODE

Copyright

Titre: Le calcul tensoriel

Auteur: Morphocode CODE

Site web: https://nombrejador.fr

Version: 26.4-26.4.26

ISBN : 9798258937865

Préface

Ce calcul tensoriel est destiné à la Relativité Général, il est donc plutôt pratique que théorique,

On introduit le tenseur sans passer par : le produit tensoriel des espaces vectoriels, les formes multilinéaires, les espaces duals etc. ... mais simplement des bases contravariantes , et covariantes ...

Traditionnellement on définit les tenseurs sur un espace euclidien puis sur un espace affine euclidien et finalement sur les variétés.

Ici on définit directement les tenseurs sur une variété (c’est l’espace que utilise la Relativité Générale).

1 ESPACE EUCLIDIEN

1.1 FORME BILINEAIRE ET FORME QUADRATIQUE

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, un $\mathbb{R}$-esv, de dimension n = dim E

¤ Forme bilinéaire :

Définition : Une forme bilinéaire f(x,y) est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui est linéaire pour x et y.

a) $f(ax_1+bx_2,y) = af(x_1,y) + bf(x_2,y)$; $a,b \in \mathbb{R}$, x_1,x_2 ,$y \in E$

b) $f(x,ay_1+by_2) = af(x,y_1) + bf(x,y_2)$; $a,b \in \mathbb{R}$, y_1,y_2 ,$x \in E$

Lorsque f(x,y) = 0 on dit que x est orthogonal à y , et on note $x \perp y$

¤ Symétrique : f(x,y) = f(y,x)

¤ Non-dégénérée : $(f(u,y) = 0, \forall y) \Rightarrow u = 0$

Le seul vecteur nul 0 est orthogonal à tout le monde.

¤ Forme quadratique :

Définition : Une forme quadratique q(x) est une application de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

a) $q(ax) = a^2 q(x)$; $a \in \mathbb{R}$, $x \in E$

b) $f(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$; $x,y \in E$

est bilinéaire .

À une forme bilinéaire $f(x,y)$ on associe une forme quadratique $q(x)$ ainsi :

$q(x) = f(x,x)$; $x \in E$

Inversement à une forme quadratique $q(x)$ on associe une forme bilinéaire $f(x,y)$ ainsi :

$f(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$; $x,y \in E$

On se donne une base $\{e_i\}_i$, on écrit simplement e_i pour ne pas alourdir les écritures

dans cette base, f et q s'écrivent:

$$f(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x^i y^j$$

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x^i x^j = \sum_{i} a_{ii}\, (x^i)^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij}\, x^i x^j$$

$a_{ij} = f(e_i, e_j)$

La matrice (a_{ij}) (dans la base e_i) est symétrique $a_{ij} = a_{ji}$

¤ Non dégénéré $\Leftrightarrow \det (a_{ij}) \neq 0$

Pour une forme quadratique q(x) , non-dégénérée on démontre deux choses: :

1) Il existe une base U , dans laquelle q(x) est de la forme:

$q(x) = a_1(x^1)^2+ a_2(x^2)^2+... +a_p(x^p)^2 - a_{p+1}(x^{p+1})^2 - ...- a_n(x^n)^2$

Une somme carrées séparées par les '+' et les '-'

p = le nombre de signe '+'

m = n - p le nombre de signe '-' ; (n=dim E)

On dit que U est une base orthogonale.

2) Le nombre p est invariant quand on passe une base orthogonale à une autre

On dit que le couple (p,m) est la signature de q (ou de f)

sig q = (p,m)

1.2 PRODUIT SCALAIRE

Le produit scalaire '.' est une forme bilinéaire, symétrique, non-dégénérée et positif. On note x.y parfois on le note aussi <x,y> , <x|y>,

1) Une forme bilinéaire :

a) $(ax_1+bx_2).y = a(x_1.y) + b(x_2.y)$; $a,b \in \mathbb{R}$, $x_1,x_2 ,y \in E$

b) $x.(ay_1+by_2) = a(x.y_1) + b(x.y_2)$; $a,b \in \mathbb{R}$, $y_1,y_2,x \in E$

2) Symétrique : $x.y = y.x$

3) Non-dégénéré : $(u.x = 0, \forall x) \Longrightarrow u = 0$

4) Positive : $\forall\ x \neq 0$, $x.x > 0$

Note :

¤ Définie: $x.x = 0 \Longrightarrow x = 0$, le seul vecteur nul est orthogonal à lui même.

¤ Non-dégénéré : $(\forall x , u.x = 0) \Longrightarrow u = 0$, le seul vecteur nul est orthogonal à tout le monde.

→On a donc non-dégénéré ⇒ définie .

→Positif ⇔ sig q = (++++...+) ; que de signe '+'

Définition espace euclidien : Un espace euclidien est un espace vectoriel muni un produit scalaire .

2 L'ESPACE AFFINE EUCLIDIEN

Définition 1 :

Un ensemble de points E• est un espace affine euclidien sur E (où E est un espace euclidien), si (E,+) opère transitivement sur E•, autrement dit s' il existe une action '•' vérifiant:

'•' : E• x E → E•

$(A,\vec{u}) \rightarrow A\bullet\vec{u} = B$

1) $A\bullet\vec{0} = A$; élément neutre $\vec{0}$

2) $(A\bullet\vec{u})\bullet\vec{v} = A\bullet(\vec{u} + \vec{v})$; associative

3) $\forall$ A,B $\exists!\vec{u}$ tels que $A\bullet\vec{u} = B$; un seul chemin entre A et B

Définition 2 :

Un ensemble de points E• est un espace affine euclidien sur E (euclidien), si il existe une application vérifiant:

E• x E• → E

$(A,B) \rightarrow \overrightarrow{AB} \in E$

1) $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; relation de CHARLES

3) $\forall$ A,B $\exists!\vec{u}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$;un seul chemin entre A et B

Autrement dit , à partir de deux points A,B on peut fabriquer un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$ (car le vecteur dépend de A,B) et qui vérifie les axiomes (1), (2), (3).

Par ex: dans $\mathbb{R}^2 = E^\bullet$ pour les points $A(a_1,a_2)$,$B(b_1,b_2)$ la fabrication du vecteur est : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$, la règle de fabrication vérifie les trois axiomes (1), (2), (3).

→Dans $E^\bullet$ on dispose un repère $\mathfrak{R}=(O,q_k)$ -nommé repère cartésien, les axes sont des droites- , où O est un point fixe, donné (nommé origine) et $(q_0,q_1,q_2,q_3, \ldots)$ une base <u>quelconque</u> de E .

→Note importante : $\mathfrak{R}$ repère tous les points de $E^\bullet$.

Un point M de $E^\bullet$ sera repéré par n coordonnées ζ^k relativement à $\mathfrak{R}$:

$\overrightarrow{OM} = \zeta^k q_k$; $\zeta = (\zeta^0, \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \ldots)$

Les ζ^k sont <u>par définition</u> les coordonnées cartésiennes du point M, $M(\zeta^k)$.

Un espace affine euclidien dispose donc un système de coordonnées cartésien ζ^k qui est valable en tout point de l'espace $E^\bullet$.

On dit qu'un espace est plat lorsqu'il dipose un système de coordonnées cartésien (les axes sont des droites) ζ^k qui est valable en tout point de l'espace .

3 LE CALCUL TENSORIEL

On se place directement dans le cadre de la Relativité Générale, on travaille donc dans un espace de dimension 4.

3.1 RAPPEL, DEFINITION ET CONVENTION

1. Vecteur
indice haut
$x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $r = (x,y,z)$

$x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$

$A = (A^1, A^2, A^3) = (A_x , A_y , A_z)$

2. Matrice
$A^i{}_j$, $A_i{}^j$, A_{ij} , A^{ij} avec $\begin{cases} i = \text{lig} \\ j = \text{col} \end{cases}$

Remarque : Parfois la place des indices sont importants il faut donc les respecter.

$L^i{}_j$ matrice de LORENTZ (HENDRIK) et $\ell^i{}_j = (L^i{}_j)^{-1}$ l'inverse de $L^i{}_j$

$$L^{i}{}_{j} = L^{i}_{j} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ell^{i}{}_{j} = \ell^{i}_{j} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ et $\beta = \frac{V}{c}$,V=vitesse du repère R' par rapport à R

La transformation de LORENTZ

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(-\beta ct + x) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

et son inverse

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(\beta ct' + x') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

η_{ij} matrice de MINKOWSKI , métrique plat

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \det(\eta_{ij}) = \eta = -1 \text{ (êta)}$$

η_{ij} = diag(1,-1,-1,-1) , sig(η_{ij}) = (+ - - -) = (1,3)

La matrice du champ électromagnétique F^{ij}

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{i}{}_{j} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

3. <u>Dérivée</u>

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x^i} = \partial_i V \quad ; V(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$\partial_{ij} = \partial_i\partial_j = \partial^2_{ij}$

$\partial_0 = c\partial_t$, $\partial_1 = \partial_x$, $\partial_2 = \partial_y$, $\partial_3 = \partial_z$

exemples :

$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = [\partial_i A_j]$

$\partial_{(k}F_{ij)} \overset{\text{def}}{=} \partial_k F_{ij} + \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki}$, avec k<i<j

soit :

$1<2<3 \rightarrow \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12}$

$0<2<3 \rightarrow \partial_0 F_{23} + \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02}$ (x)

$0<1<3 \rightarrow \partial_0 F_{13} + \partial_1 F_{30} + \partial_3 F_{01}$ (y)

$0<1<2 \rightarrow \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01}$ (z)

$\partial_{(k} F_{ij)} = 0$ (le 1er groupe d'équations de MAXWELL)

$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \partial^i V$; où $V(x_0, x_1, x_2, x_3)$

$\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

exemples

$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = [\partial^i A^j]$

4. <u>La sommation</u>
- indice-bas = indice-haut → la sommation
- indice de sommation : m, s ... (indice 'mobile', indice 'somme') ils bougent, souvent on les note par s, m, u, d, ...
- indice fixe = le rang, la position : i, j, k, ...

$a_s b^s = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3$ (convention d'EINSTEIN)

$\partial_m F^{mi} = \partial_0 F^{0i} + \partial_1 F^{1i} + \partial_2 F^{2i} + \partial_3 F^{3i} = \mu_0 J^i$ (le 2ième groupe d'équations de MAXWELL)

$\partial_s\partial^s = \partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 = - \Box$
($\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2$ opérateur d'ALEMBERT)

5. Symbole Nabla ∇

Nabla ∇ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ covariant, c'est le premier vecteur covariant connu.

$\nabla = (\partial_1 , \partial_2 , \partial_3)$, c'est un vecteur covariant.

$\nabla f = \mathrm{grad}(f) = (\partial_1 f , \partial_2 f , \partial_3 f)$, gradient c'est un vecteur

$\nabla.A^k = \mathrm{div}(A^k) = \partial_1 A^1 + \partial_1 A^2 + \partial_3 A^3$, divergence c'est un scalaire (on est dans un espace plat)

$\nabla \wedge A^k = \mathrm{rot}(A^k) = (\partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 , \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 , \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1)$, rotationnel, c'est un vecteur

$\nabla.\nabla f = \nabla^2 f = \Delta f = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f$, laplacien, scalaire

quelques formules :

$\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}(f) = \nabla \wedge (\nabla f) = (\nabla \wedge \nabla) f = 0$

$\mathrm{div}\ \mathrm{rot}(A) = \nabla.(\nabla \wedge A) = (\nabla \wedge \nabla).A = 0$

$\mathrm{div}\ \mathrm{grad}(f) = \nabla.\nabla f = \Delta f$

$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}(A) = \nabla \wedge (\nabla \wedge A) = \nabla(\nabla.A) - (\nabla.\nabla)A = \nabla(\nabla.A) - \Delta A$

$\nabla(A.B) = (\nabla.A)B + (\nabla.B)A + A \wedge (\nabla \wedge B) + B \wedge (\nabla \wedge A)$

$\mathrm{div}(A \wedge B) = \nabla.(A \wedge B) = (\nabla \wedge A).B - (\nabla \wedge B).A$

Ici pour ne pas avoir d'ambiguité, les vecteurs ont une flèche.

<u>La circulation de $\vec{A}$ le long d'une courbe Γ</u> :

$$\int_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{dl}$$

$\vec{dl}$ = l'élément de longueur, Γ orientée dans le sens trigo

<u>Le flux sortant de $\vec{A}$ d'une surface Σ</u> :

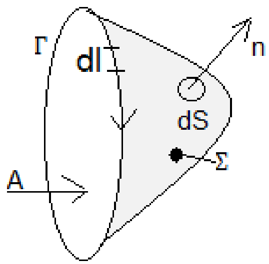
$$\int_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

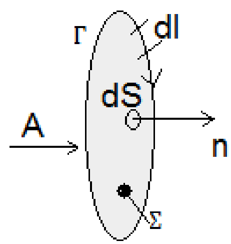
$\vec{dS} = dS\,\vec{n}$, dS=l'élément de surface et $\vec{n}$=normale extérieur

<u>Formule de Stokes</u>

$$\int_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{dl} = \int_{\Sigma} \vec{rot}\,(\vec{A}) \cdot \vec{dS}$$

la circulation de $\vec{A}$ le long d'une courbe fermée Γ est égal au flux du rotationnel de $\vec{A}$ traversant la surface Σ (appuyée sur Γ).





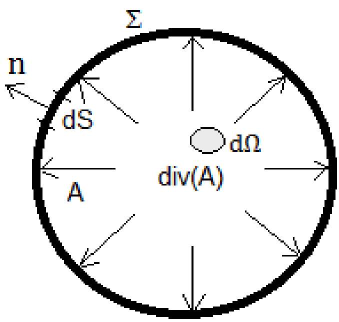
<u>Orientation de</u> Σ : On marche sur Γ dans le sens trigonométrique, n est à gauche, la surface (n=normale extérieur) est à gauche.

<u>Formule d' OSTROGRADSKI</u>

$$\int_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \int_{V} \mathrm{div}(\vec{A})\, d\Omega$$

dΩ = l'élément de volume

le flux sortant de $\vec{A}$ d'une surface fermée Σ est égal à l'intégrale de la divergence de $\vec{A}$ contenue dans le volume V (délimité par Σ).



<u>Une jolie formule</u> :

$[v \wedge (\nabla \wedge A)]^k = v^j\, \partial^k A_j - v^j\, \partial_j A^k$;le composante k

<u>Démonstration</u> :

Calculons le membre à gauche de cette égalité:

1) $\nabla \wedge A = B$

$\partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = B^1$

$\partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 = B^2$

$\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = B^3$

2) $v \wedge B = C$

$v^2 B^3 - v^3 B^2 = C^1$

$v^3 B^1 - v^1 B^3 = C^2$

$v^1 B^2 - v^2 B^1 = C^3$

$C^1 = v^2 (\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1) - v^3 (\partial_3 A^1 - \partial_1 A^3)$

$C^1 = v^2 \partial_1 A^2 - v^2 \partial_2 A^1 - v^3 \partial_3 A^1 + v^3 \partial_1 A^3$

donc pour k=1 on a:

(3.1.1) $C^1 = v^2 \partial_1 A^2 - v^2 \partial_2 A^1 - v^3 \partial_3 A^1 + v^3 \partial_1 A^3$

d'autre part :

$[v \wedge (\nabla \wedge A)]^k = v^j \partial^k A_j - v^j \partial_j A^k$;le composant k

$= (v^1 \partial^k A_1 + v^2 \partial^k A_2 + v^3 \partial^k A_3)$ - $(v^1 \partial_1 A^k + v^2 \partial_2 A^k + v^3 \partial_3 A^k)$

descendre/monter les indices pour avoir ∂ covariante et A contravariante

$= (v^1 \partial_k A^1 + v^2 \partial_k A^2 + v^3 \partial_k A^3)$ - $(v^1 \partial_1 A^k + v^2 \partial_2 A^k + v^3 \partial_3 A^k)$

$[v \wedge (\nabla \wedge A)]^k = (v^1\, \partial_k A^1 + v^2\, \partial_k A^2 + v^3\, \partial_k A^3)$

$-(v^1\, \partial_1 A^k + v^2\, \partial_2 A^k + v^3\, \partial_3 A^k)$

pour la 1ere composante k=1 ça donne:

$[v \wedge (\nabla \wedge A)]^1 = v^2\, \partial_1 A^2 + v^3\, \partial_1 A^3$ - $v^2\, \partial_2 A^1 - v^3\, \partial_3 A^1$

c'est la même expression que (3.1.1) on fait la même chose pour k=2.

$C^2 = v^3 B^1 - v^1 B^3 = v^3(\partial_2 A^3 - \partial_3 A^2) - v^1(\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1)$

$= (v^3 \partial_2 A^3 - v^3 \partial_3 A^2) - (v^1 \partial_1 A^2 - v^1 \partial_2 A^1)$
et
$[v \wedge (\nabla \wedge A)]^2 = (v^1\, \partial_2 A^1 + v^3\, \partial_2 A^3)$

$-(v^1\, \partial_1 A^2 + v^3\, \partial_3 A^2) = C^2$

il reste la dernière k=3

$C^3 = v^1 B^2 - v^2 B^1 = v^1(\partial_3 A^1 - \partial_1 A^3) - v^2(\partial_2 A^3 - \partial_3 A^2)$

$C^3 = (v^1 \partial_3 A^1 - v^1 \partial_1 A^3) - (v^2 \partial_2 A^3 - v^2 \partial_3 A^2)$

$[v \wedge (\nabla \wedge A)]^3 = (v^1\, \partial_3 A^1 + v^2\, \partial_3 A^2)$

$-(v^1\, \partial_1 A^3 + v^2\, \partial_2 A^3) = C^3$

La formule est bien démontrée

3.2 LES COORDONNEES CARTESIENNES

On va se placer directement dans l'espace <u>affine euclidien</u> $E^{\bullet}$ (=$\mathbb{R}^4$) de dimension 4,

<u>Rappel</u> :

→Dans $E^{\bullet}$ on dispose un repère cartésien $\mathfrak{R}$, càd un système de coordonnées cartésien $\zeta = (\zeta^0, \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ –les axes sont des droites- qui est valable dans tout espace $E^{\bullet}$, $M(\zeta^k)$:

3.3 LES COORDONNEES CURVILIGNES

On se donne 4 fonctions f^k de classe ≥ C^2 de $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ telles que:

f^k: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$x = (x^0,x^1,x^2,x^3) \to f^k(x) = f^k(x^0,x^1,x^2,x^3)$

$\zeta^k = f^k(x^0,x^1,x^2,x^3)$

de plus on demande que le système $f^k(x^i)$ soit bijectif sur les domaines $D \subset \mathbb{R}^4 \to D^{\bullet} \subset E^{\bullet}$ donc on a le système inverse:

$x^i = q^i(\zeta^0,\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3)$

En physique on note souvent

$\zeta^k = \zeta^k(x^0,x^1,x^2,x^3)$ au lieu de $\zeta^k = f^k(x^0,x^1,x^2,x^3)$ pour dire que les ζ^k sont en fonction des x^i, de même

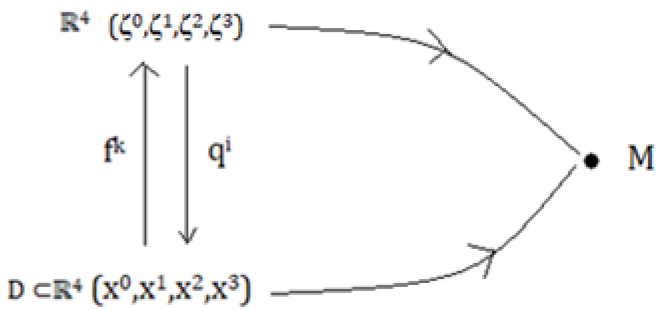
$x^i = x^i(\zeta^0,\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3)$;des nouveaux en fonction cartésiens

Un point $M(\zeta^0,\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3)$ de coordonnés $(\zeta^0,\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3)$ devient un point $M(x^0,x^1,x^2,x^3)$ de coordonnés (x^0,x^1,x^2,x^3) .

$(x^0,x^1,x^2,x^3) \in D \rightarrow M(x^0,x^1,x^2,x^3) \in D^\bullet$

On dit que les x^i est un système de coordonnées curvilignes pour le domaine $D^\bullet$.

Un système de coordonnées curvilignes x^i décrit seulement un morceau de l'espace $E^\bullet$ pas comme le système de coordonnées cartésien ζ^i qui décrit entièrement de l'espace $E^\bullet$.



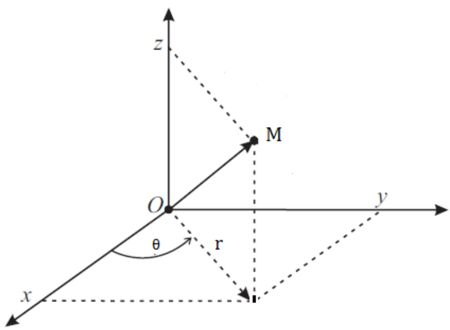
par ex pour notre espace $\mathbb{R}^3$ (=E•), soit M(x,y,z) un point de $\mathbb{R}^3$, en coordonnées cartésiennes (x,y,z) . Un système de coordonnées curvilignes (r,θ,h) est la donnée de 3 fonctions (de D sur D•) de variables r,θ,h telles que

$(\zeta^0,\zeta^1,\zeta^2) = (x,y,z)$

$(x^0,x^1,x^2) = (r,\theta,h)$

D : $r\in[0,+\infty[$; $\theta\in[0,2\pi[$; $h\in]-\infty,+\infty[$

$x = x(r,\theta,h) = r \cos\theta$
$y = y(r,\theta,h) = r \sin\theta$
$z = z(r,\theta,h) = h$



le point M(x,y,z) devient maintenant M(r,θ,h)
le système est bijectif (de D sur D•) on peut donc l'inverser
$r = r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\theta = \theta(x,y,z) = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$
$h = h(x,y,z) = z$

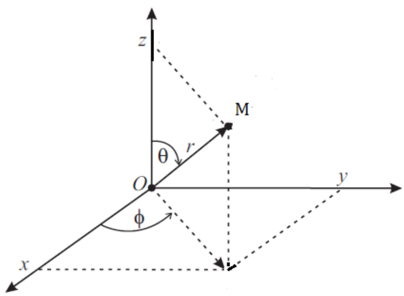
De même par ex:
un système de coordonnées curvilignes (r,θ,ϕ)

$(\zeta^0,\zeta^1,\zeta^2) = (x,y,z)$

$(x^0,x^1,x^2) = (r,\theta,\phi)$

D: $r\in[0,+\infty[$; $\theta\in[0,\pi]$; $\phi\in[0,2\pi[$

$x = x(r,\theta,\phi) = r \sin\theta \cos\phi$
$y = y(r,\theta,\phi) = r \sin\theta \sin\phi$
$z = z(r,\theta,\phi) = r \cos\theta$



le point $M(x,y,z)$ devient maintenant $M(r,\theta,\phi)$
le système est bijectif (de D sur D•) on peut donc l'inverser:

$r = r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$\theta = \theta(x,y,z) = \text{arctg}\, \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$
$\phi = \phi(x,y,z) = \text{arctg}\, \frac{y}{x}$

3.4 LES VARIETES

Une variété $\mathcal{V}$ est un ensemble de points de $E^{\bullet}$, $\mathcal{V} \subset E^{\bullet}$.
Dans $E^{\bullet}$ les points ont comme coordonnées $(\zeta^0,\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3)$ par rapport à $\mathfrak{R}$.

Nous dirons que $\mathcal{V}$ est une variété c'est la donnée des 4 fonctions f^k de classe $\geq C^2$ de $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que:

$f^k: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$

$(x^0,x^1,x^2,x^3) \rightarrow f^k(x^0,x^1,x^2,x^3) = f^k(x^i)$

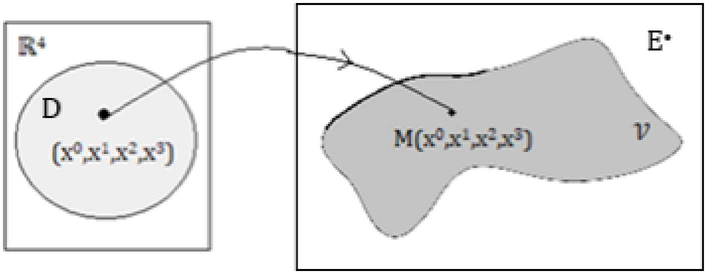
$\zeta^k = f^k(x^0,x^1,x^2,x^3)$

de plus on demande que le système $f^k(x^i)$ soit bijectif sur le domaine $D \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{V}$ donc on a le système inverse:

$x^i = q^i(\zeta^0,\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3)$.

On dit que $\mathcal{V}$ est paramétrée par les f^k mais par abus de langage on dit que $\mathcal{V}$ est paramétré par le système de coordonnées curvilignes x^i.

Les points de $\mathcal{V}$ sont décrits par les fonctions f^k, quand le 4-uplet (x^0,x^1,x^2,x^3) décrit D, le point $M(x^0,x^1,x^2,x^3)$ décrit $\mathcal{V}$.



Donc un système de coordonnées curvilignes permet de paramétrer une variété $\mathcal{V}$, se donner une variété c'est se donner un système de coordonnées curvilignes x^i.

<u>Remarque</u> : Notre variété $\mathcal{V}$ est plongée dans E• et elle est de dimension 4 , dim $\mathcal{V}$=4 .

NOTE : 1) Entre $D\subset\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{V}$, il y a seulement une bijection (de classe $\geq C^2$) entre les points

$D\subset\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{V}$

$(x^0,x^1,x^2,x^3) \rightarrow M$; une bijection de classe $\geq C^2$

Il n'y a pas de transporte de structure (euclidien, produit scalaire ...) de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathcal{V}$.

2) $\mathcal{V}$ est plongé dans E• mais elle n'a pas non plus une structure espace affine euclidien comme E• , $\mathcal{V}$ est simplement un ensemble des points c'est tout !

3) On peut définir une variété sans passer par l'espace affine E• , il suffit de se donner un ensemble de points $\mathcal{V}$ et

un système de répérage de tous ses points, càd une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}$ bijective et de classe C^2

$f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}$; $x=(x^0,x^1, ..., x^n)$

$x \to f(x) = M \in \mathcal{V}$

$f(x^0,x^1, ..., x^n) = M \in \mathcal{V}$; et $\dim \mathcal{V} = n$

3.5 LA BASE LOCALE

Rappel deux formules :

$A = (a_{ij})$ matrice , $A^{-1} = (b_{ij})$ matrice inverse de A

¤ j est fixé, donné

$$\det(A) = \sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\widehat{A}_{ij})$$

$\widehat{A}_{uv}$ = la matrice A dont on a supprimé la lig u, le col v.

C'est le développement du déterminante de A suivant la colonne j.

¤ L'inverse de A : $A^{-1} = (b_{ij})$

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(\widehat{A}_{ji})}{\det(A)}$$

On se donne donc une variété $\mathcal{V}$ paramétrée par les x^i :

$D \subset \mathbb{R}^4 \to \mathcal{V}$

$(x^0,x^1,x^2,x^3) \to M$; une bijection de classe $\geq C^2$

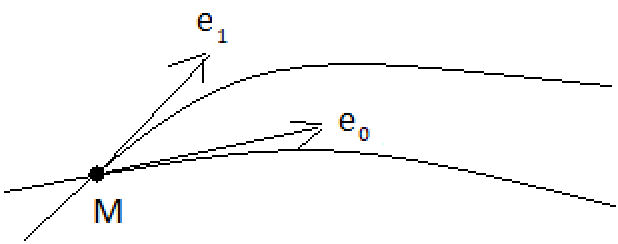
$M(x^i) \in \mathcal{V}$

On définit une base appelée base locale ou naturelle par:

$e_i = \frac{\partial M}{\partial x^i} = \partial_i M$ ($M \in \mathcal{V}$, la dérivée de M/coord curvilignes)

puis le repère (M,e_i) associé à e_i .

<u>Remarque</u> : e_i se trouve dans E, plus précisément dans le plan tangent T_M ($\subset E$) en M à $\mathcal{V}$.



<u>on pose</u> :

¤ $g_{ij} = e_i \cdot e_j$, remarque g_{ij} c'est $g_{ij}(x^0,x^1,x^2,x^3) = g_{ij}(x) = g(M)$

¤ $g = \det(g_{ij})$

g_{ij} est symétrique $g_{ij} = g_{ji}$

Comme le produit scalaire est non-dégénéré on a $\det(g_{ij})\neq 0$ on définit alors la matrice (g^{ij}) l'inverse de la matrice (g_{ij}) :

$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ l'inverse de (g_{ij}) et on a

$$g^{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(\hat{g}_{ji})}{g}$$

$\widehat{A}_{uv}$ = la matrice A dont on a supprimé la lig u, le col v .

Remarque: comme $g_{ij} = g_{ji}$ d'où

$$g^{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(\hat{g}_{ij})}{g}$$

¤ $ds^2 = g_{ij}\, x^i x^j$; la métrique de $\mathcal{V}$, on note $(\mathcal{V},g_{ij})$ ou $(\mathcal{V},ds^2)$

Le symbole de KRONECKER

$$\delta_i^{\ j} = \delta_i^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$$

$g_{im}\, g^{mj} = \delta_i^j$; car g^{ij} est l'inverse de g_{ij} : $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$

$g_{im}\, g^{mj} = g_i^j$ d'où $g_i^j = \delta_i^j$

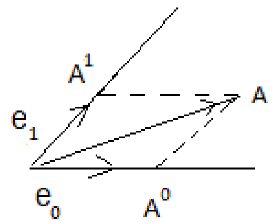
On pose :

$e^i = g^{ij}\, e_j$

à la base contravariante $\{e^i\}_i$ on associe la base covariante $\{e_i\}_i$.

Un vecteur A s'écrit alors:

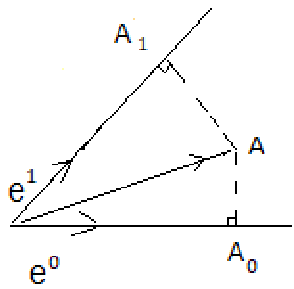
$A = A^i e_i$



composantes contravariantes

ou

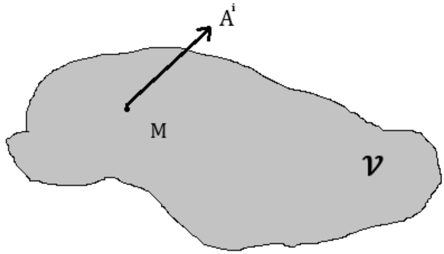
$A = A_i e^i$



composantes covariantes

On dit que les A^i sont des composantes contravariantes de A et les A_i sont des composantes covariantes de A, mais

par abus de langage on dit que A^i est un vecteur contravariante, et que A_i est un vecteur covariant au lieu de composantes contravariantes et covariantes du vecteur A.
On a la propriété suivante:
$A.e_k = A^i e_i .e_k = A^i g_{ik} = A_k$



$M \in \mathcal{V}$ et $A^i \in E$

3.6 LE CHANGEMENT DU REPERE

Le but c'est voir comment un vecteur contravariante A^i ou covariant A_i s'est transformé quand on passe d'un repère (M,e_i) à un autre (M,e'_u) ou de la base e_i à la base e'_u puisque M ne bouge pas.

On a des transformations pour passer du repère R au repère R' et inversement

$R \xrightarrow{x'(x)} R'$

$x'^u = x'^u(x^i)$; la transformation

et le système inverse

$R' \xrightarrow{x(x')} R$

$x^i = x^i(x'^u)$

Par définition de e'_u c'est:

$$e'_u = \frac{\partial M}{\partial x'^u}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x'^u} = \frac{\partial M}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x'^u} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^u} e_i$$

$$e'_u = \frac{\partial x^i}{\partial x'^u} e_i$$

et en inversant

$$e_i = \frac{\partial x'^u}{\partial x^i} e'_u$$

Pour un vecteur contravariant on a:

$$A^i e_i = A^i \frac{\partial x'^u}{\partial x^i} e'_u$$

ce qui montre que:

$$A'^{u} = \frac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}} A^{i}$$

d'autre part

$$A'^{u} e'_{u} = A'^{u} \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} e_{i}$$

d'où

$$A^{i} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} A'^{u}$$

Pour un vecteur covariant

$$A'_{u} = A.e'_{u} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} A.e_{i} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} A_{i}$$

$$A'_{u} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} A_{i}$$

et

$$A_{i} = A.e_{i} = A.\frac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}} e'_{u} = \frac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}} A.e'_{u} = \frac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}} A'_{u}$$

$$A_{i} = \frac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}} A'_{u}$$

Résumé : Les vecteurs contravariants et covariants sont transformés suivant la loi (dite loi tensorielle) ci-dessous:

$$R \xrightarrow{x'(x)} R'$$

$x'^{u} = x'^{u}(x^{i})$; la transformation

$$A'^{u} = \frac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}} A^{i} \quad ; \text{contravariant}$$

$$A_{i} = \frac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}} A'_{u} \quad ; \text{covariant}$$

3.7 LA DEFINITION D'UN TENSEUR

Soit $x'^u(x^i)$ une transformation qui permet de passer de R à R' donc on passe de R' à R par $x^i(x'^u)$ l'inverse de $x'^u(x^i)$.

$$R \xrightarrow{x'(x)} R'$$

$$x'^u = x'^u(x^i)$$

la <u>matrice</u> jacobienne J_i^u et le jacobien J=det J_i^u de la transformation

$$J_i^u \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}}\right) \quad ; \begin{cases} u = \text{lig (fonct)} \\ i = \text{col (var)} \end{cases}$$

$$J = \det J_i^u = \det\left(\frac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}}\right) \neq 0$$

le système inverse

$$R' \xrightarrow{x(x')} R$$

$$x^i = x^i(x'^u)$$

la <u>matrice</u> jacobienne j_u^i et le jacobien j=det j_u^i de la transformation inverse

$$j_u^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^u}\right) = (J_i^u)^{-1} = \left(\frac{\partial x'^u}{\partial x^i}\right)^{-1}$$

$$j = \det j_i^u = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^u}\right) = \frac{1}{J} \neq 0$$

<u>Définition un tenseur</u> : Une grandeur physique <u>A</u>[1] , représentée par une famille de nombres $A_{ij}{}^k$ dans le repère R , cette même grandeur représentée par une autre famille de nombres $A'_{uv}{}^w$ dans un autre repère R' . On dit que <u>A</u> est un tenseur si $A_{ij}{}^k$ et $A'_{uv}{}^w$ sont reliés par la formule :

$$(3.7.1)\quad A'_{uv}{}^{w} = \frac{\partial x'^w}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x'^u}\frac{\partial x^j}{\partial x'^v}A_{ij}{}^k$$

ou la formule

$$(3.7.2)\quad A_{ij}{}^{k} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^w}\frac{\partial x'^u}{\partial x^i}\frac{\partial x'^v}{\partial x^j}A'_{uv}{}^w$$

---

[1] Remarque : On a déjà rencontré ce genre de situation.

Un vecteur V de composanr (v_1, v_2, v_3) dans la base B .

<u>A</u> : joue le rôle du vecteur V

$A_{ij}{}^k$: joue le rôle (v_1, v_2, v_3)

R : joue le rôle de B

Par abus de langage on dira que A_{ij}^{k} est un tenseur au lieu de $\underline{A}$ est un tenseur (en fait les A_{ij}^{k} , A_{ijk} , A_i^{jk} , A^i_{jk} , etc ... sont des "composantes" du tenseur $\underline{A}$) . On dit que A_{ij}^{k} s'est transformé en $A'_{uv}{}^{w}$ tensoriellement ou suivant la loi tensorielle.

<u>Remarque importante</u> : $x'^u(x^i)$, $x^i(x'^u)$, A_{ij}^{k} , $A'_{uv}{}^{w}$ sont des 4 données du problème. On doit prouver la relation (3.7.1) ou la relation (3.7.2) ci-dessus pour montrer que A_{ij}^{k} est un tenseur.

On dit que le tenseur A_{ij}^{k} est d'ordre 3 (3 indices) et de type $\binom{1}{2}$ 1-contravariant et 2-covariant, de même un vecteur covariant A_i est un tenseur d'ordre 1 et de type $\binom{0}{1}$ etc ...

NOTE:

1) On devrait dire un champ de tenseur, un champ de scalaire, ... car A_{ij}^{k} , A, ... dépendent du point M , $A_{ij}^{k}(M)$, A(M), ... mais par abuse de langage on dit tenseur, scalaire, ... au lieu de champ de tenseur, champ scalaire, ...

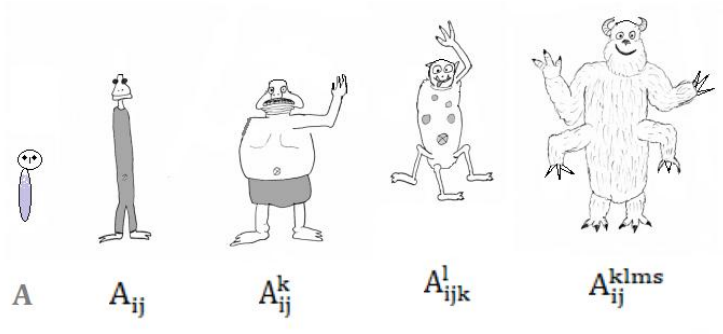
2) Pour un vecteur V(x,y,z) les composantes x,y,z sont des nombres .

Pour un tenseur $\underline{A}(A_{ij} , A^i_j , A_i^j , A^{ij})$ les composantes A_{ij} , A^i_j , A_i^j , A^{ij} sont des matrices , on passe d'une composante à une autre par g_{ij} , g^{ij} .

$A_{ij} \rightarrow A^i_j = g^{im} A_{mj}$

$A_{ij} \rightarrow A^{ij} = g^{im} g^{js} A_{ms}$

....



Les tenseurs

Résumer

indices haut → contravariant

$$\begin{cases} A'^{u} = \dfrac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}} A^{i} \\ A^{i} = \dfrac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} A'^{u} \end{cases}$$

pour les indices bas → covariant

$$\begin{cases} A'_{u} = \dfrac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} A_{i} \\ A_{i} = \dfrac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}} A'_{u} \end{cases}$$

Exemple :

1) Tenseur métrique

$g_{ij} = e_i \cdot e_j$

voyons si g_{ij} est un tenseur.

$g'_{uv} = e'_u \cdot e'_v$ par définition

$$g'_{uv} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^u} e_i \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x'^v} e_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^u} \frac{\partial x^j}{\partial x'^v} e_i \cdot e_j$$

$$g'_{uv} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^u} \frac{\partial x^j}{\partial x'^v} g_{ij}$$

ce qui montre que g_{ij} est un tenseur (il est de type $\binom{0}{2}$), on dit que g_{ij} est le tenseur métrique de $\mathcal{V}$, il permet monter ou descendre des indices.

$\underline{g} = (g_{ij}, g^{ij}, g_i{}^j, g^i{}_j)$

2) Tenseur KRONECKER

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$$

$\underline{\delta} = (\delta_{ij}, \delta^{ij}, \delta_i{}^j, \delta^i{}_j)$

Note : $g_i{}^j = \delta_i{}^j$

3) Tenseur du champ électromagnétique $\underline{F}$

$\underline{F} = (F_{ij}, F^{ij}, F_i{}^j, F_i{}^j)$

Un tenseur comme $A_{ij}{}^{k}$, il y a plusieurs façons d'écrire les indices comme par exemple:
A^{k--}_{ij-} , A^{-k-}_{i-j} , A^{k--}_{-ij} etc ....

Car parfois la position des indices ont une importance.

Imaginons qu'on a une fonction f(i,j,k,L,M) = A^{---lm}_{ijk--} , avec

la convention suivante: majuscule=indice-haut, minuscule=indice bas et l'ordre des indices de gauche droite , par exemple:

$$f(i, L, j, k, M) = A^{-l--m}_{i-jk-}$$

$$f(i, L, M, j, k) = A^{-lm--}_{i--jk}$$

en générale on a

$$f(i, L, j, k, M) \neq f(i, L, M, j, k)$$

$$A^{-l--m}_{i-jk-} \neq A^{-lm--}_{i--jk}$$

par exemple

$$f(L, M, i, j, k) = A^{lm---}_{--ijk}$$

$$f(M, L, i, j, k) = A^{ml---}_{--ijk}$$

il n'y a aucune raison que f soit symétrique en (LM)
f(L,M,i,j,k) = f(M,L,i,j,k) donc à priori $A^{lm---}_{--ijk} \neq A^{ml---}_{--ijk}$

Quand les indices ne jouent pas le même rôle, il faut donc les distinguer en mettant une virgule ',' pour les séparer

les groupes.
par exemple

$\partial_i + \partial_j - \partial_k = \partial_i - \partial_k + \partial_j = - \partial_k + \partial_i + \partial_j$

On voit bien que les indices i,j,k ne jouent pas le même rôle, il y a deux groupes d'indices (ij) et k on écrit donc

$A_{ij,k} = \partial_i + \partial_j - \partial_k = \partial_i - \partial_k + \partial_j = - \partial_k + \partial_i + \partial_j$

ou

$A_{k,ij} = \partial_i + \partial_j - \partial_k = \partial_i - \partial_k + \partial_j = - \partial_k + \partial_i + \partial_j$

le 'k' tout seul porte un signe mois '-'.

si on écrit A_{ijk} on ne sait pas qui porte le signe moins '-' !!!

un autre exemple

$\partial_i\partial_j A_k$

là encore on voit bien qu' il y a deux groupes d'indices (ij) et k on note par exemple

$\partial_i\partial_j A_k = Q_{ij,k}$

ou encore

$\partial_k F_{ij}$ on montera par exemple: $\partial_k F_{ij} = B_{k,ij}$

<u>Résumé</u> : En générale on doit respecter les positions des indices, mais pour ne pas alourdir les écritures on écrira

$A_{i-jk-}^{-l--m} = A_{ijk}{}^{lm}$ ou $A^{lm}{}_{ijk}$ et même A_{ijk}^{lm}

quand il n'y a pas d'ambiguïtés

Symétrique, antisymétrique

Le tenseur A_{ij}^k est symétrique en (ij) si ∀k on a:

$A_{ij}^k = A_{ji}^k$

et antisymétrique en (ij) si ∀k on a:

$A_{ij}^k = -A_{ji}^k$

exemples

¤ $A_{ij,k} = \partial_i + \partial_j - \partial_k$; $U_{ij,k} = \partial_i \partial_j A_k$

on voit que $A_{ij,k}$, $U_{ij,k}$ sont symétriques en (ij)

¤ g_{ij} est symétrique.

¤ $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = [\partial_i A_j]$

$F_{ij} = -F_{ji}$ il est antisymétrique en (ij)

¤ $P^{ij} = A^i B^j - A^j B^i$

P^{ij} est antisymétrique en (ij)

Quand on a un tenseur antisymétrique ou il y a une distinction entre les indices il faut respecter la position des indices.

Note: Lorsque A_{ij} est symétrique alors A^{ij} , $A_i{}^j$ et $A^i{}_j$ sont aussi symétriques en effet :

¤ $A^{ij} = g^{im}\, g^{sj}\ A_{ms} = g^{js}\, g^{mi}\ A_{sm} = A^{ji}$

¤ $A_i{}^j = g^{mj}\ A_{im} = g^{jm}\ A_{mi} = g^{jm}\ g^{si}\ A_{ms}$

$A_i{}^j = g^{jm}\ g^{si}\ A_{ms}$

$A_j{}^i = g^{im}\ g^{sj}\ A_{ms} = g^{js}\ g^{mi}\ A_{sm} = A_i{}^j$

¤ $A^i{}_j = g^{im}\ A_{mj} = g^{im}\ g^{sj}\ A_{ms}$

$A^j{}_i = g^{jm}\ g^{si}\ A_{ms} = g^{is}\ g^{mj}\ A_{sm} = A^i{}_j$

3.8 LES OPERATIONS SUR LES TENSEURS

Règle de monter ou descendre des indices

On a déjà vu, pour monter l'indice i en haut $e_i \to e^i$ on fait:

1) on utilise g^{ij} ; pour monter

2) on part de l'indice bas : e_i

3) l'indice qu'on monte 'i' devient indice de sommation 's'

$e_i \to e^i = g^{is}\ e_s$

Monter: $e^i = g^{is}\ e_s$ on dit que 's' est l'indice de sommation (l'indice 'somme', 'mobile'), et 'i' l'indice fixe

Descendre: $e^i \to e_i$

1) on utilise g_{ij} ; pour descendre

2) on part de l'indice haut : e^i

$e^i \to e_i = g_{is}\, e^s$

Monter: $\partial_i \to \partial^i = g^{is}\, \partial_s$

Voyons pour A^i, A_i

$A_i = A\,.\, e_i = A^s\, e_s\,.\, e_i = g_{si}\, A^s$

$A^i \to A_i = g_{is}\, A^s$ (s=somme, mobile)

$A = A_s e^s = A_s\, g^{si} e_i$

$A_i \to A^i = g^{is}\, A_s$

De même , soit $A_{ij}{}^{k}$ un tenseur

$A_{ij}{}^{k} \to A_{ijk} = A_{ij}{}^{m}\, g_{km}$; descendre le k juste en dessous
$A_{ij}{}^{k} \to A^{i}{}_{j}{}^{k} = g^{mi}\, A_{mj}{}^{k}$; on monte le i juste au dessus

Pour deux indices , on aura :

$A_{ij} = g_{is}\, g_{jm}\, A^{sm}$

$A^{ij} = g^{is}\, g^{jm}\, A_{sm}$

etc ....

<u>Égalité</u> :

$Q^{i}_{jk} = K^{i}_{jk}$ même indices même position

Somme de deux tenseurs:

$A^{ij} = Q^{ij} + K^{ij}$ même indices même position

Produit par un scalaire:

$A^{ij} = aQ^{ij}$; a=un scalaire

Produit de deux tenseurs:

$A_{ij}^{k} = Q_{ij}K^{k}$

On respecte la position et l'ordre des indices c'est tout !!

Note: le produit tensoriel n'est pas commutatif, en effet

$A^{ij} = Q^{i}K^{j}$

$A^{ji} = K^{j}Q^{i}$

Il n'y a aucune raison que A^{ij} soit symétrique !!

Il y a une raison très simple que le produit tensoriel n'est pas commutatif, en effet les éléments $e^{i}e^{j}$ et $e^{j}e^{i}$ sont des éléments d'une base, donc ils sont différents, sinon la famille n'est plus libre !!

Contraction :

On contracte A_{ij}^{k} en j=k
$A_{i} = A_{ik}^{k}$ on met l'indice j=k , haut=bas, (sommer sur k)
Il faut montrer que le résultat d'une contraction donne bien un tenseur.

Démo

$$A'_{uv}{}^{w} = \frac{\partial x'^{w}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{v}} A_{ij}{}^{k}$$

$$A'_{u} = A'_{uw}{}^{w} = \frac{\partial x'^{w}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{w}} A_{ij}{}^{k}$$

Dans les x^j , il y a x^k quand j=k, donc

$$A'_{u} = \frac{\partial x'^{w}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{w}} A_{ik}{}^{k}$$

comme

$$\frac{\partial x'^{w}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{w}} = 1$$

$$A'_{u} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} A_{ik}{}^{k}$$

$$A'_{u} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} A_{i}$$

Ceci montre bien que la contraction donne bien un tenseur

Multiplication contractée :

$A_{isj}{}^{mk} = Q_{is}\, K_j{}^{mk}$

$A_{ij}{}^{k} = Q_{is}\, K_j{}^{sk}$

On contracte $Q_{is}\, K_j{}^{mk}$ en s=m

Un critère de tensoriel :

A_{ij} est un tenseur si quels que soient p^i, q^j le $A_{ij}\,p^iq^j$ est invariant (par changement de repère)

Démo

* Soit A_{ij} tenseur, alors

$$A'_{uv} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^u}\frac{\partial x^j}{\partial x'^v}A_{ij}$$

$$A'_{uv}\,p'^u\,q'^v = \frac{\partial x^i}{\partial x'^u}\frac{\partial x^j}{\partial x'^v}\frac{\partial x'^u}{\partial x^i}\frac{\partial x'^v}{\partial x^j}\,p^i q^j A_{ij}$$

Or on a

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^u}\,\frac{\partial x'^u}{\partial x^i} = 1$$

de même

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^v}\,\frac{\partial x'^v}{\partial x^j} = 1$$

d'où

$$A'_{uv}\,p'^u\,q'^v = p^i q^j A_{ij}$$

ce qui montre que $A_{ij}\,p^iq^j$ est invariant.

* Inversement

$$A'_{uv}\,p'^u\,q'^v = p^i q^j A_{ij}$$

$$A'_{uv}\frac{\partial x'^u}{\partial x^i}\frac{\partial x'^v}{\partial x^j}p^iq^j = p^iq^jA_{ij}$$

$$A'_{uv}\frac{\partial x'^u}{\partial x^i}\frac{\partial x'^v}{\partial x^j} = A_{ij}$$

A_{ij} s'est transformé suivant la loi tensorielle donc A_{ij} est un tenseur.

De même

A^{ij} est un tenseur si quels que soient p_i, q_j le A^{ij} p_iq_j est invariant.

<u>Corollaire</u> :

a) $A_{ij}{}^k$ est un tenseur si quel que soit p_k, le $Q_{ij} = A_{ij}{}^k p_k$ est un tenseur

b) $A_{ij}{}^k$ est un tenseur si quels que soient p^i,q^j le
$K^k = A_{ij}{}^k p^i q^j$ est un tenseur

Exemple, on a vu le symbole de KRONECKER δ_i^j

$\delta_i^j = g_{is}\, g^{sj}$

voyons si c'est un tenseur, on a:

$$\delta_i^j A^i = g_{is} g^{sj}\ A^i = \ g_i^j A^i = A^j$$

pour tout A^i donc δ_i^j est bien un tenseur !

Bien que les règles de calculs tensoriels ne sont pas vraiment compliquées, il faut quand même prendre des précautions.

a) Les indices de sommation vont par pair (haut=bas) dans un terme

$A_i B^i C_i + Q^k K_j$ → mauvais

$A_m B^m C_i + Q^k K_j$ → ok

$A_i B^m C_m + Q^m O_m K_j = A_i B^m C_m + Q^k O_k K_j$ → ok

$A_i B^m C_m + Q^m O_i K_j$ → mauvais

b) Les indices de sommation peuvent être le même dans des termes différents, puisque les sommes sont indépendants

$A_m B^m C_i + Q^k K_k$ → ok

$A_m B^m C_i + Q^m K_m$ → ok aussi

c) Quand on monte ou descend un indice, il faut remplacer cet indice par l'indice de sommation dans toute l'expression, sinon on aura des erreurs, par exemple

$Q_{ij} = K_{ij}$

$g^{jm} Q_{im} = g^{jm} K_{ij}$ (on a oublié de remplacer j par m dans K_{ij})

$Q_i{}^j = K_i{}^m$

c'est bizarre, pour une égalité on doit avoir les même indices dans la même position !!!!

Le plus simple c'est monter j en changeant en k par exemple j→k

$g^{kj} Q_{ij} = g^{kj} K_{ij}$

$Q_i^k = K_i^k$

d) Parfois il faut changer les indices de sommation avant de remplacer dans une expression par exemple

(3.8.1) $C^k = Q_i^k K^i$

(3.8.2) $A_i^j = B_{ik}^j C^k$

dans (3.8.2) les indices i,j sont fixes, dans (3.8.1) il faut changer i=m avant de remplacer dans (3.8.2)

$A_i^j = B_{ik}^j \, Q_m^k K^m$

Car dans (3.8.2) 'i' est l'indice fixe, alors que dans (3.8.1) 'i' est l'indice mobile (l'indice de sommation, qui bouge) il faut donc le changer avant de remplacer.

3.9 LES PROPRIETES DE G_{IJ}

<u>Rappel</u> : $g_{ij} = e_i \,.\, e_j = \partial_i M \,.\, \partial_j M$

On a construit g_{ij} à partir du $\partial_i M$ et $\mathcal{V}$ est donnée par le système de coordonnées curvilignes x^i (le paramétrage de $\mathcal{V}$).

$dM = \partial_i M \, dx^i$

$dM = dx^i e_i$

$dM.dM = dx^i e_i . dx^j e_j = g_{ij} dx^i dx^j$

On note $dM.dM = ds^2$ d'où

$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$; la métrique de $\mathcal{V}$, on note: $(\mathcal{V}, g_{ij})$ ou $(\mathcal{V}, ds^2)$

On dit que g_{ij} est le tenseur métrique de $\mathcal{V}$ et que ds^2 est la métrique de $\mathcal{V}$. Attention !! ds^2 c'est simplement une notation, il peut donc être négatif !!

* (g^{ij}) c'est la matrice inverse de (g_{ij}) : $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$

$$g^{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(\hat{g}_{ji})}{g}$$

comme (g^{ij}) est l'inverse de (g_{ij}) on a:

* $g_{im} g^{mj} = \delta_i^j$; symbole de KRONECKER

* $g_{im} g^{mj} = g_i^j = \delta_i^j$

* $g_{ij} g^{ij} = g_i^j = \delta_i^i = \delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 4$

<u>Attention</u> !! l'écriture " δ_i^i " est une somme: $\delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3$, alors que $\delta_{(i)}^i = \delta_i^{(i)} = 1$ est un nombre.

* $dg = - g g_{ij} dg^{ij}$

* $dg = g g^{ij} dg_{ij}$

* $\delta g = g g^{ij} \delta g_{ij}$

* $\partial_k g = g g^{ij} \partial_k g_{ij}$

en effet

$dg = g\, g^{ij}\, dg_{ij} \rightarrow dg = g\, g^{ij}\ \partial_k g_{ij} dx^k = \partial_k g\ dx^k \rightarrow \partial_k g = g\, g^{ij}\ \partial_k g_{ij}$

Vous avez sûrement remarqué qu'on écrit $\sqrt{-g}$ la question qu'on se pose alors pourquoi le déterminant de g_{ij} est négatif ? $\det(g_{ij}) = g < 0$??

En relativité restreinte l'espace-temps est un espace de MINKOWSKI , son tenseur métrique η_{ij} est:

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ ;\ \det(\eta_{ij}) = \eta = -1 \text{ (êta)}$$

$\eta^{ij} = (\eta_{ij})^{-1}$

$sig(\eta_{ij}) = (+\ -\ -\ -) = (1,3)$

et la métrique ds^2 vaut :

$ds^2 = \eta_{ij}\, dx^i dx^j = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$

Le principe d'équivalence dit que localement il existe un référentiel galiléen ζ^k (avec la métrique η_{ij}) . Le passage du référentiel quelconque x^i (avec la métrique g_{ij}) au référentiel galiléen ζ^k est donné par la transformation:

$$x^i \xrightarrow{\zeta(x)} \zeta^k$$

$\zeta^k = \zeta^k(x^i)$; la transformation , x^i ancien, ζ^k nouveau

et les tenseurs g_{ij} et η_{ij} se lient de la façon suivante:

$$g_{ij} = \frac{\partial \zeta^s}{\partial x^i}\frac{\partial \zeta^m}{\partial x^j}\eta_{sm}$$

$\det(g_{ij}) = J^2 \det(\eta_{ij}) = -J^2$ où J désigne le jacobien de la transformation, $J = \det\left(\frac{\partial \zeta^k}{\partial x^i}\right) \neq 0$

donc $\det(g_{ij}) = g < 0$!!!

* donc en relativité $g < 0$. (relativité restreinte $g = -1$)

* $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ij}\,\delta g^{ij}$; une formule à retenir

* $\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{ij}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ij}$; une formule à retenir

<u>Démo</u>

On part de la relation

$dg = g\, g^{ij}\, dg_{ij}$

comme $g_{ij}\, g^{ij} = 4 \rightarrow g^{ij}\, dg_{ij} + g_{ij}\, dg^{ij} = 0 \rightarrow g^{ij}\, dg_{ij} = -\, g_{ij}\, dg^{ij}$

$dg = g\, g^{ij}\, dg_{ij} = -\, g\, g_{ij}\, dg^{ij}$ d'où

$\delta g = -g\, g_{ij}\ \delta g^{ij}$ et

$$\delta\left(\sqrt{-g}\right)^2 = -\left(\sqrt{-g}\right)^2 g_{ij}\,\delta g^{ij}$$

$$2\left(\sqrt{-g}\right)\delta(\sqrt{-g}) = -\left(\sqrt{-g}\right)^2 g_{ij}\,\delta g^{ij}$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ij}\,\delta g^{ij}\ .$$

3.10 LES SYMBOLES DE CHRISTOFFEL

En chaque point M de $\mathcal{V}$, on attache un tenseur $A_{ij}{}^k(M)$, dont les composantes s'expriment dans le repère local (M,e_i). On veut comparer $A_{ij}{}^k(M)$ avec $A_{ij}{}^k(dM)$, ce même tenseur mais en dM, un point infiniment voisin de M. Ce tenseur $A_{ij}{}^k(dM)$, s'exprime dans le repère (dM,de_i).

Pour pouvoir les comparer il suffit de connaître comment varie le repère (M,e_i), comment (M,e_i) passe en (dM,de_i) Pour ça, on exprime dM, et de_i dans la base e_i .

Mais d'abord posons:

$\partial_i e_j \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{ij}{}^k\, e_k$

par définition $\Gamma_{ij}{}^k$ s'appelle <u>symbole de CHRISTOFFEL</u>.
Ici on voit qu'il y a deux groupes d' indices dans $\Gamma_{ij}{}^k$, le groupe (ij) et k car ils ne jouent pas le même rôle (k=sommation, i,j = fixe). Quand il y a une distinction entre les indices il faut respecter leur place, mais ici il n'y a pas d'ambiguïté de noter Γ_{ij}^k .

On savait déjà.

$dM = dx^i\, e_i$

on pose
$de_j = \omega_j{}^k e_k$

ici il n'y a pas d'ambiguïté on note ω_j^k .

mais de_j c'est aussi
$de_j = \partial_i e_j \, dx^i$
$de_j = \Gamma_{ij}^k \, dx^i \, e_k$
d'où
$\omega_j^k = \Gamma_{ij}^k \, dx^i$

Donc pour connaître (dM,de_i) il suffit de connaître dx^i et les Γ_{ij}^k . Les Γ_{ij}^k connectent les repères (M,e_i) et (dM,de_i) c'est pourquoi ils s'appellent les symboles de connexion.

On descend k en respectant la différence entre (ij) et k

$\Gamma_{ij,k} = g_{km} \, \Gamma_{ij}^m$

il y a deux groupes d'indices dans Γ_{ij}^k et $\Gamma_{ij,k}$, le groupe (ij) et k car on ne peut pas permuter i et k par exemple

On voit facilement que Γ_{ij}^k est symétrique en (ij)

$* \;\; \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

<u>Démo</u>

$\partial_i e_j = \partial_i \partial_j M = \partial_j \partial_i M = \partial_j e_i$ ($\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ théorème de SCHWARZ)

$\Gamma_{ij}^k \, e_k = \Gamma_{ji}^k \, e_k$

$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

donc $\Gamma_{ij,k}$ aussi symétrique en (ij)

$\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}$

$*\ \partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}$ (distribuer ki puis kj)

<u>Démo</u>

$g_{ij} = e_i \cdot e_j$
$\partial_k g_{ij} = (\partial_k e_i) \cdot e_j + e_i \cdot (\partial_k e_j)$
$\partial_k g_{ij} = (\Gamma^s_{ki}\ e_s) \cdot e_j + e_i \cdot (\Gamma^m_{kj}\ e_m)$
$\partial_k g_{ij} = (e_s \cdot e_j)\ \Gamma^s_{ki} + (e_i \cdot e_m)\ \Gamma^m_{kj}$ propriété du produit scalaire

$\partial_k g_{ij} = g_{sj}\ \Gamma^s_{ki} + g_{im}\ \Gamma^m_{kj}$
on descend les indices en respectant leur distinction (les groupes)
$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}$

$*\ \Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})$ permutation circulaire droite (ijk)→(jki)→(-kij)

<u>Démo</u>

$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}$ (1)

$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j}$ (2)

$\partial_j g_{ki} = \Gamma_{jk,i} + \Gamma_{ji,k}$ (3)

On additionne (2)+(3)-(1) et compte tenu de la symétrique en (ij) de $\Gamma_{ij,k}$ on trouve:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})$$

et si on monte l'indice k

$* \ \Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{km} (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij})$

<u>Note</u> : Γ_{ij}^{k} n'est pas un tenseur, en effet.

Rappel:

$$e'_v = \frac{\partial x^k}{\partial x'^v} e_k$$

$$\partial'_u = \frac{\partial x^p}{\partial x'^u} \partial_p$$

$\partial_i e_j = \Gamma_{ij}^{k} \ e_k$

Par définition de Γ'^{s}_{uv} est :

$\partial'_u e'_v = \Gamma'^{s}_{uv} \ e'_s$ d'où

$\partial'_u (\frac{\partial x^k}{\partial x'^v} e_k) = \Gamma'^{s}_{uv} \ (\frac{\partial x^k}{\partial x'^s} e_k)$

$\partial'_u (\frac{\partial x^k}{\partial x'^v} e_k) = \partial'_u (\frac{\partial x^k}{\partial x'^v}) \ e_k + \frac{\partial x^k}{\partial x'^v} \ \partial'_u e_k$

$= \frac{\partial x^p}{\partial x'^u} \partial_p (\frac{\partial x^k}{\partial x'^v}) \ e_k + \frac{\partial x^k}{\partial x'^v} \ \frac{\partial x^p}{\partial x'^u} \ \partial_p e_k$

Changeons des indices $\partial_p e_k \rightarrow \partial_i e_j$

$= \frac{\partial x^p}{\partial x'^u} \partial_p (\frac{\partial x^k}{\partial x'^v}) \ e_k + \frac{\partial x^j}{\partial x'^v} \ \frac{\partial x^i}{\partial x'^u} \ \partial_i e_j$

$= \frac{\partial x^p}{\partial x'^u} \partial_p (\frac{\partial x^k}{\partial x'^v}) \ e_k + \frac{\partial x^j}{\partial x'^v} \frac{\partial x^i}{\partial x'^u} \Gamma_{ij}^{k} e_k$

$\Gamma'^{s}_{uv} \ (\frac{\partial x^k}{\partial x'^s} e_k) = [\frac{\partial x^p}{\partial x'^u} \partial_p (\frac{\partial x^k}{\partial x'^v}) + \frac{\partial x^j}{\partial x'^v} \frac{\partial x^i}{\partial x'^u} \Gamma_{ij}^{k}] e_k$

$$\Gamma'^{s}_{uv} = \frac{\partial x'^{s}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{p}}{\partial x'^{u}}\partial_p\left(\frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{v}}\right) + \frac{\partial x'^{s}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{v}}\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}}\Gamma^{k}_{ij}$$

Donc Γ^k_{ij} ne s'est pas transformé comme un tenseur. Par contre on peut vérifier que $S_{ij}{}^k$:

$S_{ij}{}^k = \Gamma_{ij}{}^k - \Gamma_{ji}{}^k$

est un tenseur .

3.11 LA DIFFERENTIELLE COVARIANTE

Définition : par définition la différentielle covariante $\mathcal{D}$ est :

$\mathcal{D}A^i \stackrel{\text{def}}{=} dA^i + \Gamma^i_{mk} A^m dx^k$; différentielle covariante

$\mathcal{D}A^i = \mathcal{D}_k A^i dx^k$

Définition : par définition la dérivée covariante est :

$\mathcal{D}_k A^i \stackrel{\text{def}}{=} \partial_k A^i + \Gamma^i_{km} A^m$ (def=par définition)

$\mathcal{D}_k A^i$ dérivée covariante de A^i

$\mathcal{D}_k A_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial_k A_i - \Gamma^m_{ki} A_m$

Pour les tenseurs d'ordre deux :

$\mathcal{D}_k A^{ij} = \partial_k A^{ij} + \Gamma^i_{km} A^{mj} + \Gamma^j_{km} A^{im}$; on dérive k,i puis k,j

$\mathcal{D}_k A_{ij} = \partial_k A_{ij} - \Gamma^m_{ki} A_{mj} - \Gamma^m_{kj} A_{im}$

$\mathcal{D}_k A^i{}_j = \partial_k A^i{}_j + \Gamma^i_{km} A^m{}_j - \Gamma^m_{kj} A^i{}_m$

Plus généralement

$\mathcal{D}_k A^p_{ij} = \partial_k A^p_{ij} + \Gamma^p_{km} A^m_{ij} - \Gamma^m_{ki} A^p_{mj} - \Gamma^m_{kj} A^p_{im}$

3.12 LE THEOREME DE RICCI

* $\mathcal{D} g_{ij} = 0$; très important

ça donne

* $\mathcal{D}_k g_{ij} = 0$ ou $\mathcal{D}_k g^{ij} = 0$

<u>Démo</u>

$\mathcal{D}_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^m_{ki} g_{mj} - \Gamma^m_{kj} g_{im}$

$\mathcal{D}_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - (\Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i})$

$\mathcal{D}_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \partial_k g_{ij} = 0$

Note : ce théorème permet de faire entrer et sortir g_{ij} de $\mathcal{D}_k$

$g_{ij} \mathcal{D}_k(A_m{}^k) = \mathcal{D}_k(g_{ij} A_m{}^k)$

<u>La divergence de A^i</u>

div $A^i = \mathcal{D}_i A^i = \partial_i A^i + \Gamma^i_{im} A^m$ (on est dans un espace courbe) on a

$\partial_k g_{ij} - (\Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}) = 0$

$g^{ij}\, \partial_k g_{ij} - (g^{ij}\, \Gamma_{ki,j} + g^{ij}\, \Gamma_{kj,i}) = 0$

$g^{ij}\, \partial_k g_{ij} - \Gamma^i_{ki} + \Gamma^i_{ki} = 0$

$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{ij}\, \partial_k g_{ij}$

or

* $\partial_k g = g\, g^{ij}\, \partial_k g_{ij}$

d'où

$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\, \partial_k g$

$\Gamma^i_{ki} = \frac{\partial_k \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}$

d'où une formule sympa

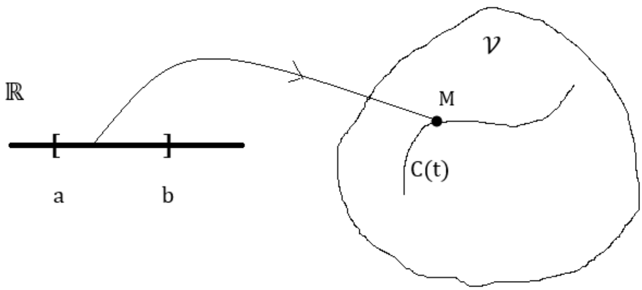
$\mathrm{div}\, A^i = \mathcal{D}_i A^i = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_i (A^i \sqrt{-g}) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (A^i \sqrt{-g})}{\partial x^i}$

3.13 LES GEODESIQUES

Une courbe de $\mathcal{V}$ est l'ensemble des points de $\mathcal{V}$ générés par une fonction C : $[a,b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}$ de classe $\geq C^2$

$C: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{V}$

$t \to C(t) = M \in \mathcal{V}$



Une géodésique est un chemin (une courbe) de $\mathcal{V}$ qui demande "le moindre d'effort" ($\delta S_p = 0$) lorsqu'on l'emprunte. Il y a plusieurs façons de trouver les géodésiques d'une variété, on peut les trouver par ex, à partir du principe de moindre action d'une particule libre .

$S_p = -mc \int ds \to \delta S_p = 0$ où S_p = action de la particule libre

mais la plus simple c'est utiliser la dérivée covariante, en effet le principe d'équivalence nous permet de passer de 'd' à '$\mathcal{D}$'.

¤ En mécanique newtonien (on est dans l'espace affine euclidien) une courbe $C(t) = C(x^0(t), x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ est paramétrée par t=le temps , et une particule libre suit une géodésique suivant l'équation :

$$\frac{dv}{dt} = 0\;;\; v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dr}{dt}$$

v = vitesse de la particule

¤ En relativité restreinte (on est dans l'espace MINKWOSKI) une courbe $C(\tau) = C(x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau))$ est paramétrée par τ=le temps propre , et une particule libre suit une géodésique suivant l'équation :

$$\frac{du^i}{d\tau} = 0\;;\; u^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx^i}{d\tau}$$

u^i = quadri-vitesse de la particule

¤ En relativité générale (on est dans l'espace riemnnien) une courbe $C(s) = C(x^0(s), x^1(s), x^2(s), x^3(s))$ C(s) est paramétrée par s=métrique (localement, s=intervalle), et une particule libre dans un champ de gravitation suit une géodésique suivant l'équation :

$$\frac{\mathcal{D}u^i}{ds} = 0\;;\; u^i \stackrel{\text{def}}{=} c\,\frac{dx^i}{ds}$$

u^i = tenseur vitesse

Or

$\mathcal{D}u^i = du^i + \Gamma^i_{jk}\, u^j\, dx^k$

d'où en divisant par ds ça donne

$$\frac{\mathcal{D}u^i}{ds} = \frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{jk}\, u^j \frac{dx^k}{ds}$$

$$\frac{\mathcal{D}u^i}{ds} = c\frac{d^2x^i}{ds^2} + c\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

$$\frac{\mathcal{D}u^i}{ds} = c(\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds})$$

d'où

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

(dériver les coordonnées par rapport au paramètre)

<u>Remarque</u> : cette équation n'est valable que pour une particule m de masse non nul $m \neq 0$, mais pas pour la lumière (un photon), en effet, localement on est dans un espace de MINKWOSKI, pour un photon le $ds=0$!! car

$r = ct \rightarrow dr = cdt$

$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 = c^2dt^2 - c^2dt^2 = 0$

il faut alors utiliser un autre paramétrage que s .

* En relativité restreinte on démontre que le quadrivecteur d'onde $k^i = (\omega/c, k)$ où $k = \frac{\omega}{c} u_r$ est paramétré par un paramètre nommé σ et on a :

$k^i = \frac{dx^i}{d\sigma}$ et $dk^i = 0$

$dk^i = 0 \Longrightarrow$ ce qui nous donne en relativité générale $Dk^i = 0$ d'où

$$\frac{d^2x^i}{d\sigma^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\sigma}\frac{dx^k}{d\sigma} = 0$$

* Mais on peut aussi utiliser le quadrivecteur d'impulsion p^i du photon en effet on démontre aussi que ce quadrivecteur $p^i = (h\nu/c, p)$ où $p = \frac{h}{\lambda} u_r$ est aussi paramétré par σ et on a :

$p^i = \frac{dx^i}{d\sigma}$ et $dp^i = 0$

$dp^i = 0 \Longrightarrow$ ce qui nous donne en relativité générale $Dp^i = 0$ d'où

$$\frac{d^2x^i}{d\sigma^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\sigma}\frac{dx^k}{d\sigma} = 0$$

Donc pour une masse non nul on utilise le tenseur vitesse u^i et $\mathcal{D}u^i = 0$, pour la lumière on utilise soit le quadrivecteur d'onde k^i et $\mathcal{D}k^i = 0$, soit quadrivecteur d'impulsion p^i et $\mathcal{D}p^i = 0$.

En gros ça signifie que, pour la lumière il existe un paramètre nommé σ qui joue le même rôle que s mais on a $d\sigma \neq 0$, donc pour la lumière à chaque fois on a ds on remplace par dσ c'est tout !

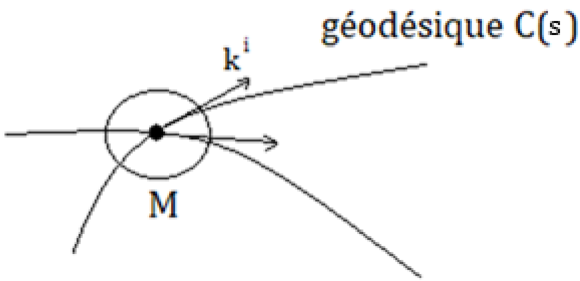
On dit alors qu' une particule massive suit une géodésique de genre temps, et le photon suit une géodésique de genre nul ou isotope.

3.14 LE SYSTEME DE COORDONNES NORMALES OU GEODESIQUE

Soit x^i un système de coordonnées de $\mathcal{V}$, on se donne un point M de $\mathcal{V}$ et une direction k^i .

On se place dans un voisinage très très petit de M dans ces conditions on démontre qu'il existe une seule géodésique C(s) passant par M et a la direction k^i ($= \frac{dx^i}{ds}$) et qui de plus vérifie :

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = 0$$



$$C(s) = (x^0(s), x^1(s), x^2(s), x^3(s))$$

Par définition le système de coordonnées normales ou géodésiques n^i est:

$n^i = s\,k^i$

<u>Propriété 1</u> :

Dans un système de coordonnées normales n^i , les symboles de CHRISTOFFEL sont nuls .

En effet , $C(s) = (x^0(s), x^1(s), x^2(s), x^3(s))$ devient $C(s) = (n^0(s), n^1(s), n^2(s), n^3(s))$ et l'équation de la géodésique C(s) est :

$$\frac{d^2n^i}{ds^2} + \Gamma^i_{pq}\frac{dn^p}{ds}\frac{dn^q}{ds} = 0$$

$$\frac{dn^i}{ds} = k^i \,, \frac{d^2n^i}{ds^2} = \frac{dk^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2} = 0$$

$\Gamma^i_{pq}\; k^p k^q = 0$; pour tout choix de k^i

Dans cette somme si on choisit :

$k^i = (1,0,0,0) \rightarrow \Gamma^i_{00} = 0$

$k^i = (0,1,0,0) \rightarrow \Gamma^i_{11} = 0$

$k^i = (0,0,1,0) \rightarrow \Gamma^i_{22} = 0$

$k^i = (0,0,0,1) \rightarrow \Gamma^i_{33} = 0$

donc $\Gamma^i_{pp} = 0$

et puis si on choisit :

$k^i = (1,1,0,0) \rightarrow \Gamma^i_{01} = \Gamma^i_{10} = 0$

$k^i = (1,0,1,0) \rightarrow \Gamma^i_{02} = \Gamma^i_{20} = 0$

etc ....

Finalement tous les Γ sont nuls

$\Gamma^i_{pq} = 0$

<u>Propriété 2</u> :

$\partial_k g_{ij} = 0$

On a :

$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}$

et

$\Gamma_{pq,i} = g_{im} \Gamma^m_{pq}$

Dans un système de coordonnées normales n^i, les $\Gamma^i_{pq} = 0$

d'où

$\partial_k g_{ij} = 0$

donc $\partial_k g_{ij} = 0$ dans tout système de coordonnées

3.15 LE TENSEUR DE COURBURE

Il y a des différentes façons de définir le tenseur de courbure:

→ par le concept "transport parallèle" ,

→ par la dérivée covariante .

On va utiliser la dérivée covariante .

Calculons : $\mathcal{D}_p\mathcal{D}_q A^k$

$$\mathcal{D}_p\mathcal{D}_q A^k = \partial_p\left(\mathcal{D}_q A^k\right) - \Gamma^m_{pq}\mathcal{D}_m A^k + \Gamma^k_{pm}\mathcal{D}_q A^m$$

$$= \partial_p\left(\partial_q A^k + \Gamma^k_{qi}A^i\right) - \Gamma^m_{pq}\mathcal{D}_m A^k + \Gamma^k_{pm}\left(\partial_q A^m + \Gamma^m_{qi}A^i\right)$$

$$= \partial_p\,\partial_q A^k + \left(\partial_p\Gamma^k_{qi}\right)A^i + \Gamma^k_{qi}\,\partial_p A^i - \Gamma^m_{pq}\mathcal{D}_m A^k$$

$$+\Gamma^k_{pm}\,\partial_q A^m + \Gamma^m_{qi}\,\Gamma^k_{pm}A^i$$

On permute p,q : $\mathcal{D}_q\mathcal{D}_p A^k$

$$= \partial_q\,\partial_p A^k + \left(\partial_q\Gamma^k_{pi}\right)A^i + \Gamma^k_{pi}\,\partial_q A^i - \Gamma^m_{qp}\mathcal{D}_m A^k$$

$$+\Gamma^k_{qm}\,\partial_p A^m + \Gamma^m_{pi}\,\Gamma^k_{qm}A^i$$

formons:

$$\mathcal{D}_p\mathcal{D}_q A^k - \mathcal{D}_q\mathcal{D}_p A^k$$

puis on change les indices de sommation et on simplifie:

$$= \left(\partial_p \Gamma^k_{qi}\right)A^i + \Gamma^m_{qi}\ \Gamma^k_{pm}\, A^i - \left(\partial_q \Gamma^k_{pi}\right)A^i - \Gamma^m_{pi}\ \Gamma^k_{qm}\, A^i$$

$$= \left[\partial_p \Gamma^k_{qi} + \Gamma^m_{qi}\ \Gamma^k_{pm} - \partial_q \Gamma^k_{pi} - \Gamma^m_{pi}\ \Gamma^k_{qm}\right]A^i$$

On pose par définition le tenseur de courbure:

$$R_{i\ ,pq}^{\ k} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_p \Gamma^k_{qi} + \Gamma^m_{qi}\ \Gamma^k_{pm} - \partial_q \Gamma^k_{pi} - \Gamma^m_{pi}\ \Gamma^k_{qm}$$

Pas facile à retenir par cœur !!

<u>Attention</u> !! il faut respecter les positions des indices (ik), (pq) ainsi i,k peuvent monter ou descendre juste à leur place, car on verra que ce tenseur est antisymétrique en (ik) et en (pq).

$$R_{i-,pq}^{-k,--}$$

si on descend l'indice k en bas il faut respecter sa position

$$R_{ik,pq} = g_{ks}\, R_{i\ ,pq}^{\ s}$$

<u>Quelques propriétés</u> : $R_{ik,pq}$

$$R_{ik,pq} = g_{ks}\, R_{i\ ,pq}^{\ s}$$

$$g_{ks}\, R_{i\ ,pq}^{\ s} = g_{ks}\ \partial_p \Gamma^s_{qi} + g_{ks}\, \Gamma^m_{qi}\ \Gamma^s_{pm} - g_{ks}\ \partial_q \Gamma^s_{pi} - g_{ks}\, \Gamma^m_{pi}\ \Gamma^s_{qm}$$

Plaçons nous dans un repère normale, dans ce repère les Γ^k_{ij} sont nuls, et $\mathcal{D}_k = \partial_k$

$$R_{ik\ ,pq} = g_{ks}\ \partial_p \Gamma^s_{qi} - g_{ks}\ \partial_q \Gamma^s_{pi}$$

comme $\mathcal{D}_k g_{ij} = 0 \Longrightarrow \partial_k g_{ij} = 0$ donc on peut rentrer g_{ks} dans ∂_p et ∂_q

$$R_{ik,pq} = \partial_p g_{ks}\Gamma^s_{qi} - \partial_q g_{ks}\Gamma^s_{pi}$$

$$R_{ik,pq} = \partial_p \Gamma_{qi,k} - \partial_q \Gamma_{pi,k}$$

$$* \, \partial_p \Gamma_{qi,k} = \frac{1}{2}(\partial_{pq} g_{ik} + \partial_{pi} g_{kq} - \partial_{pk} g_{qi})$$

$$* - \partial_q \Gamma_{pi,k} = \frac{1}{2}(-\partial_{qp} g_{ik} - \partial_{qi} g_{kp} + \partial_{qk} g_{pi})$$

Compte tenu de $\partial_{pq} = \partial_{qp}$ et $g_{ij} = g_{ji}$ d'où

$$2R_{ik,pq} = \partial_{pi} g_{kq} - \partial_{pk} g_{qi} - \partial_{qi} g_{kp} + \partial_{qk} g_{pi}$$

Et on voit que:

$$2R_{ki,pq} = \partial_{pk} g_{iq} - \partial_{pi} g_{qk} - \partial_{qk} g_{ip} + \partial_{qi} g_{pk} = -2R_{ik,pq}$$

$$2R_{ik,qp} = \partial_{qi} g_{kp} - \partial_{qk} g_{pi} - \partial_{pi} g_{kq} + \partial_{pk} g_{qi} == -2R_{ik,pq}$$

* $R_{ik,pq} = - R_{ki,pq}$ antisymétrique en $(i \leftrightarrow k)$

* $R_{ik,pq} = - R_{ik,qp}$ antisymétrique en $(p \leftrightarrow q)$

* $R_{ik,pq} = R_{ki,qp}$

on a:

$$2R_{ik,pq} = \partial_{pi} g_{kq} - \partial_{pk} g_{qi} - \partial_{qi} g_{kp} + \partial_{qk} g_{pi}$$

faisons une permutation circulaire des (kpq) on trouve

$$2R_{ip,qk} = \partial_{qi} g_{pk} - \partial_{qp} g_{ki} - \partial_{ki} g_{pq} + \partial_{kp} g_{qi}$$

$$2R_{iq,kp} = \partial_{ki} g_{qp} - \partial_{kq} g_{pi} - \partial_{pi} g_{qk} + \partial_{pq} g_{ki}$$

En additionnant tous les trois:

$R_{ik\ ,pq} + R_{ip\ ,qk} + R_{iq\ ,kp} = 0$

3.16 LE TENSEUR DE RICCI

$R_{i\ ,pj}^{k} = \partial_p \Gamma_{ji}^{k} + \Gamma_{ji}^{m}\ \Gamma_{pm}^{k} - \partial_j \Gamma_{pi}^{k} - \Gamma_{pi}^{m}\ \Gamma_{jm}^{k}$

On contracte $R_{i\ ,pj}^{k}$ avec p=k

Par définition on pose:

$R_{ij} = R_{i\ ,kj}^{k}$

$R_{ij} = \partial_k \Gamma_{ij}^{k} + \Gamma_{ij}^{m}\ \Gamma_{km}^{k} - \partial_j \Gamma_{ki}^{k} - \Gamma_{ki}^{m}\ \Gamma_{jm}^{k}$

Attention !! si on note les positions

$R_{12,34}^{56,78}$

la contraction se fait avec les positions (6,3). On démontre alors que la contraction des indices du même groupe donne le tenseur nul, du groupe différents donne R ou -R,

On montre que R_{ij} est symétrique (pas évident)

$R_{ij} = R_{ji}$

Il suffit de montrer que

$$\partial_i \Gamma^k_{jk} = \partial_j \Gamma^k_{ik}$$

Pour ça on utilise la relation suivante:

$$\Gamma^k_{ik} = \frac{1}{2}\partial_i \ln(\sqrt{-g})$$

$$\partial_j \Gamma^k_{ik} = \frac{1}{2}\partial_j\,\partial_i \ln(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}\partial_i\,\partial_j \ln(\sqrt{-g}) = \partial_i \Gamma^k_{jk}$$

Les autres termes de R_{ij} sont symétriques donc R_{ij} est symétrique.

Contractons le tenseur de RICCI avec g^{ij} on obtient un invariant R appelé courbure scalaire.

$R = g^{ij}R_{ij} = R_i{}^i$

3.17 L'IDENTITE DE BIANCHI

On se place dans un repère normal, le tenseur de courbure vaut

$$R_{i\,,pq}^{\,k} = \partial_p \Gamma^k_{qi} - \partial_q \Gamma^k_{pi}$$

$$\mathcal{D}_h R_{i\,,pq}^{\,k} = \mathcal{D}_h\,\partial_p \Gamma^k_{qi} - \mathcal{D}_h\,\partial_q \Gamma^k_{pi}$$

Mais dans un repère normal on a $\mathcal{D}_h = \partial_h$ d'où

$$\mathcal{D}_h R_{i\,,pq}^{\,k} = \partial_h\,\partial_p \Gamma^k_{qi} - \partial_h\,\partial_q \Gamma^k_{pi}$$

On fait une permutation des indices (hpq)

$$\mathcal{D}_p R_{i\ ,qh}^{k} = \partial_p\, \partial_q \Gamma_{hi}^{k} - \partial_p\, \partial_h \Gamma_{qi}^{k}$$

$$\mathcal{D}_q R_{i\ ,hp}^{k} = \partial_q\, \partial_h \Gamma_{pi}^{k} - \partial_q\, \partial_p \Gamma_{hi}^{k}$$

Puis en additionnant tous les trois ça donne

$$\mathcal{D}_h R_{i\ ,pq}^{k} + \mathcal{D}_p R_{i\ ,qh}^{k} + \mathcal{D}_q R_{i\ ,hp}^{k} = 0$$

C'est l'identité de BIANCHI .

contractons p=k, et attention !! à l'ordre des indices (somme)

$$\mathcal{D}_h R_{i\ ,kq}^{k} + \mathcal{D}_k R_{i\ ,qh}^{k} + \mathcal{D}_q R_{i\ ,hk}^{k} = 0$$

$$\mathcal{D}_h R_{i\ ,kq}^{k} + \mathcal{D}_k R_{i\ ,qh}^{k} - \mathcal{D}_q R_{i\ ,kh}^{k} = 0$$

$$\mathcal{D}_h R_{iq} + \mathcal{D}_k R_{i\ ,qh}^{k} - \mathcal{D}_q R_{ih} = 0$$

contractons encore avec g^{is}

$$g^{is} \mathcal{D}_h R_{iq} + g^{is} \mathcal{D}_k R_{i\ ,qh}^{k} - g^{is} \mathcal{D}_q R_{ih} = 0$$

On peut rentrer g^{is} dans $\mathcal{D}_k$ car $\mathcal{D}_k g^{is} = 0$

$$\mathcal{D}_h g^{is} R_{iq} + \mathcal{D}_k g^{is} R_{i\ ,qh}^{k} - \mathcal{D}_q g^{is} R_{ih} = 0$$

contractons s=q

$$\mathcal{D}_h g^{iq} R_{iq} + \mathcal{D}_k g^{iq} R_{i\ ,qh}^{k} - \mathcal{D}_q g^{iq} R_{ih} = 0$$

$$\mathcal{D}_h R + \mathcal{D}_k g^{iq} R_{i\ ,qh}^{k} - \mathcal{D}_q R_{h}^{q} = 0$$

$$\mathcal{D}_h R + \mathcal{D}_k R^{qk}{}_{,qh} - \mathcal{D}_q R_h^q = 0$$

$$\mathcal{D}_h R - \mathcal{D}_k R^{kq}{}_{,qh} - \mathcal{D}_q R_h^q = 0$$

$$\mathcal{D}_h R - \mathcal{D}_k R_h^k - \mathcal{D}_k R_h^k = 0$$

$$\mathcal{D}_k R_h^k - \frac{1}{2}\mathcal{D}_h R = 0$$

On veut mettre $\mathcal{D}_k$ en facteur, on remplace donc $\mathcal{D}_h$ par $\delta_h{}^k\mathcal{D}_k$ (propriété de $\delta_i{}^j$) .

$$\mathcal{D}_k R_h^k - \frac{1}{2}\delta_h^k \mathcal{D}_k R = 0$$

$$\mathcal{D}_k \left(R_h^k - \frac{1}{2}\delta_h^k R\right) = 0$$

comme $\delta_i{}^k = g_i{}^k$

$$\mathcal{D}_k \left(R_i^k - \frac{1}{2}g_i^k R\right) = 0$$

Ca signifie que la divergence du tenseur $(R_h^k - \frac{1}{2}g_h^k R)$ est nul.

On pose

$$\mathcal{G}_i^k = R_i^k - \frac{1}{2}Rg_i^k$$

$$\mathcal{D}_k \mathcal{G}_i^k = 0$$

$$\mathcal{G}_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij}$$

ce tenseur $\mathcal{G}_{ij}$ est appelé tenseur gravitationnel

c'est un tenseur conservatif, très important en relativité générale.

Une formule changement de variables dans une intégrale.

on pose:

$d\Omega = dx^0dx^1dx^2dx^3$; $d\Omega' = dx'^0dx'^1dx'^2dx'^3$

$R \xrightarrow{x'(x)} R'$

$x'^u = x'^u(x^i)$; inverse: $x^i = x^i(x'^u)$

la matrice jacobienne J_i^u et le jacobien J de la transformation

$$J_i^u \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial x'^u}{\partial x^i}\right) \quad ; \begin{cases} u = \text{lig (fonct)} \\ i = \text{col (var)} \end{cases}$$

$$J = \det J_i^u = \det\left(\frac{\partial x'^u}{\partial x^i}\right) \neq 0$$

$d\Omega' = |J|\, d\Omega$; $|J|$ = la valeur absolue de J

$$\int_{V'} f'(x'^u)\, d\Omega' = \int_V f(x^i)\, |J|\, d\Omega$$

$$f(x^i) \stackrel{\text{def}}{=} f'\left(x'^u(x^i)\right)$$

$x'(V) = V'$ = l'image de V

on a:

$$g'_{uv} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^u} \frac{\partial x^j}{\partial x'^v} g_{ij}$$

$g' = 1/J^2\, g$

$J^2\, g' = g$

$|J|^2\, |g'| = |g|$

$|J| \sqrt{|g'|} = \sqrt{|g|}$

Encore 3 formules en intégrale c'est très utile.

Soit Λ = un champ scalaire , ($\Lambda = \Lambda'$)

$$\int \Lambda' \sqrt{|g'|}\, d\Omega' = \int \Lambda \frac{1}{|J|} \sqrt{|g|}\ |J|\, d\Omega$$

comme $g < 0$, $g' < 0 \Longrightarrow |g| = -g$, $|g'| = -g'$

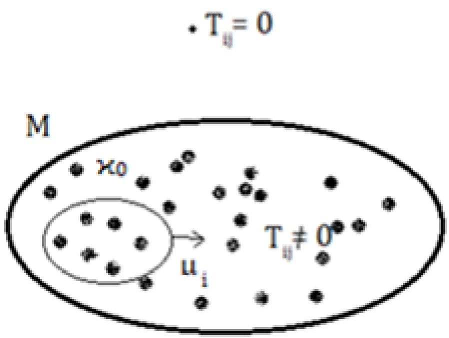
$$\int \Lambda' \sqrt{-g'}\, d\Omega' = \int \Lambda \sqrt{-g}\, d\Omega$$

théorème d'OSTROGRADSKI

$$\int \sqrt{-g}\, A^i dS_i = \int \sqrt{-g}\, \mathcal{D}_i A^i\, d\Omega$$

$$\int \sqrt{-g}\, A^i dS_i = \int \partial_i (\sqrt{-g}\, A^i)\, d\Omega$$

4 LE TENSEUR ENERGIE-IMPULSION DE LA MATIERE



On considère que les particules de la matière M qui engendre le champ gravitationnel forment un <u>système isolé</u> et sont en mouvement, un mouvement très simple : un fluide de poussière avec une vitesse u_i (c'est la vitesse par rapport à un référentiel fixe, le bord du fluide par ex) :

$$u_i = c\frac{dx_i}{ds}$$

Dans ce cas le tenseur énergie-impulsion de la matière T_{ij} est par définition :

$$(4.1.1)\quad T_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g}\,)}{\partial g^{ij}} - \partial_m\left[\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g}\,)}{\partial(\partial_m g^{ij})}\right]\right)$$

où

$\Lambda = g^{ij}\,\Lambda_{ij}$

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2}\varkappa_0 c^2 g_{ij} - \varkappa_0 u_i u_j$$

$\varkappa_0$ distribution propre de la matière M (distribution de la matière M par rapport à un référentiel où les particules sont immobiles)

Voyons que vaut T_{ij}

comme Λ_{ij} ne contient pas les dérivées $\partial_m g^{ij}$ de g^{ij} , la relation (4.1.1) devient

$$-\sqrt{-g}\,T_{ij} = \frac{\partial\left(\Lambda\sqrt{-g}\,\right)}{\partial g^{ij}}$$

$$-\sqrt{-g}\,T_{ij} = \sqrt{-g}\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{ij}} + \Lambda\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{ij}}$$

$$-\sqrt{-g}\,T_{ij} = \sqrt{-g}\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{ij}} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{ij}\Lambda$$

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\,g_{ij}\,\Lambda - \frac{\partial(g^{sm}\,\Lambda_{sm}\,)}{\partial g^{ij}}$$

comme Λ_{ij} ne contient pas non plus les g^{ij} on a:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\,g_{ij}\,\Lambda - \Lambda_{sm}\,\frac{\partial g^{sm}}{\partial g^{ij}}$$

parmi les g^{sm} il y a un seul g^{ij} , quand s=i, m=j d'où

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\ g_{ij}\Lambda - \Lambda_{ij}$$

or

$\Lambda = g^{ij}\ \Lambda_{ij}$

$$\Lambda = \frac{1}{2}\varkappa_0 c^2 g_{ij} g^{ij} - \varkappa_0 g^{ij} u_i u_j$$

$$\Lambda = \frac{4}{2}\varkappa_0 c^2 - \varkappa_0 u_i u^i$$

(4.1.2) $\Lambda = \frac{4}{2}\varkappa_0 c^2 - \varkappa_0 c^2 = \varkappa_0 c^2$

d'où

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\ g_{ij}\varkappa_0 c^2 - \frac{1}{2}\varkappa_0 c^2 g_{ij} + \varkappa_0 u_i u_j$$

$$T_{ij} = \varkappa_0 u_i u_j$$

<u>Propriétés de</u> T_{ij} :

(a) On voit donc que :

$$T_{ij} = \varkappa_0 u_i u_j$$

est construit à partir de la matière $\varkappa_0$.

(b) On a vu que u_i est un tenseur donc T_{ij} est aussi un tenseur.

Mais on peut aussi le justifier directement. On va prendre T^{ij} voir si T^{ij} est un tenseur, on a :

$$T^{ij} = \varkappa_0 c^2 \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}$$

et

$$T'^{uv} = \varkappa_0 c^2 \frac{dx'^u}{ds}\frac{dx'^v}{ds}$$

or

$$dx'^u = \frac{\partial x'^u}{\partial x^i} dx^i$$

d'où

$$T'^{uv} = \varkappa_0 c^2 \ \frac{\partial x'^u}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds} \ \frac{\partial x'^v}{\partial x^j}\frac{dx^j}{ds}$$

$$T'^{uv} = \frac{\partial x'^u}{\partial x^i} \ \frac{\partial x'^v}{\partial x^j} \ \varkappa_0 c^2 \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}$$

$$T'^{uv} = \frac{\partial x'^u}{\partial x^i} \ \frac{\partial x'^v}{\partial x^j} T^{ij}$$

Ce qui montre que T^{ij} (donc T_{ij}) est bien un tenseur.

(c) Il est visiblement que T_{ij} est symétrique,

(d) Il faut maintenant voir si T_{ij} se conserve c'est-à-dire

$\mathrm{div}(T_{ij}) = \mathcal{D}_j T_i^j = 0$

Comme $T_i^j = \varkappa_0 u_i u^j$, ($u_i = c\frac{dx_i}{ds}$ et $u^j = c\frac{dx^j}{ds}$) ça donne

$\mathcal{D}_j(T_i^j) = \mathcal{D}_j(\varkappa_0 u_i u^j) = \varkappa_0 u^j \mathcal{D}_j(u_i) + u_i \mathcal{D}_j(\varkappa_0 u^j)$

or on est dans un système isolé on a $\mathcal{D}_j(\varkappa\, u^j) = 0$ car il y a la conservation de masse (comme dans le cas de conservation de charge $\mathcal{D}_j(\rho u^j) = 0$)

$$\mathcal{D}_j(\varkappa\, u^j) = \mathcal{D}_j(\varkappa_0 \gamma u^j) = \gamma_j(\varkappa_0 u^j) = 0 \Longrightarrow \mathcal{D}_j(\varkappa_0 u^j) = 0$$

il nous reste donc

$$\mathcal{D}_j(T_i^{\,j}) = \varkappa_0\, u^j\, \mathcal{D}_j(u_i)$$

or

$$\mathcal{D}u_i = (\mathcal{D}_j u_i)\, dx^j$$

$$\frac{\mathcal{D}u_i}{ds} = (\mathcal{D}_j u_i)\frac{dx^j}{ds}$$

$$c\frac{\mathcal{D}u_i}{ds} = u^j \mathcal{D}_j u_i$$

$$\mathcal{D}_j(T_i^{\,j}) = \varkappa_0\, c\, \frac{\mathcal{D}u_i}{ds}$$

or $\mathcal{D}u_i = \mathcal{D}(g_{ij}\, u^j) = \mathcal{D}(g_{ij})\, u^j + g_{ij}\, \mathcal{D}(u^j) = g_{ij}\, \mathcal{D}(u^j)$

car $\mathcal{D}(g_{ij}) = 0$ (théorème de RICCI) donc

$$\frac{\mathcal{D}u_i}{ds} = g_{ij}\frac{\mathcal{D}u^j}{ds}$$

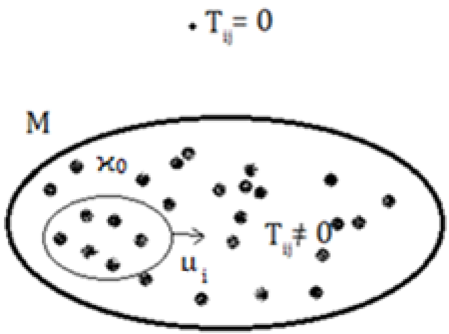
$$\frac{\mathcal{D}u^j}{ds} = c\left(\frac{d^2x^j}{ds^2} + \Gamma^j_{km}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds}\right)$$

$$\mathcal{D}_j T_i^{\,j} = \varkappa_0 c^2 g_{ij}\left(\frac{d^2x^j}{ds^2} + \Gamma^j_{km}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds}\right)$$

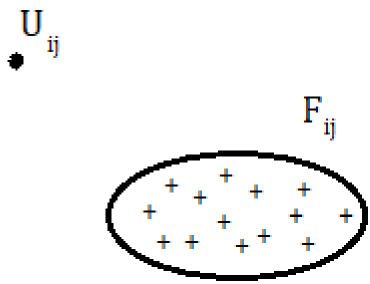
Plaçons nous dans un repère normal, les gamma Γ^j_{km} sont nuls. Et la matière n'a pas d'interaction avec l'extérieur (système isolé) la vitesse des particules est constante donc il n'y a pas d'accélération .

$$\frac{d^2x^j}{ds^2} = 0$$

finalement on a bien : $\mathcal{D}_j T_i^j = 0$



5 LE TENSEUR ENERGIE-IMPULSION DU CHAMP EM DANS LE VIDE



En présence du champ électromagnétique F_{ij} , le tenseur énergie-impulsion du champs EM (dans le vide, là où on est il n'y a pas de charge, $J^k = 0$) U_{ij} est par définition :

$$(5.1.1)\quad U_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial(Q\sqrt{-g}\,)}{\partial g^{ij}} - \partial_m\left[\frac{\partial(Q\sqrt{-g}\,)}{\partial(\partial_m g^{ij})}\right]\right)$$

$Q = g^{ij}Q_{ij}$

$$Q_{ij} = \frac{1}{2\mu_0} g^{km} F_{ik}\ F_{jm} \quad \text{(dans le vide, sans charge: } J^k = 0)$$

$F_{ij} = [\mathcal{D}_i A_j] = \mathcal{D}_i A_j - \mathcal{D}_j A_i = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ (dans un repère normal)

<u>Remarque</u> : Il faut noter que Q est un scalaire, en effet on a:

$$Q = g^{ij} Q_{ij} = \frac{1}{\mu_0}\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)$$

Maintenant calculons le tenseur U_{ij} .

Comme Q_{ij} ne contient pas les dérivées $\partial_m g^{ij}$ de g^{ij} , la relation (5.1.1) montre que le tenseur énergie-impulsion U_{ij} du champ électromagnétique vaut :

$$U_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(Q\sqrt{-g})}{\partial g^{ij}}$$

$$\frac{\partial(Q\sqrt{-g}\,)}{\partial g^{ij}} = \sqrt{-g}\frac{\partial Q}{\partial g^{ij}} + Q\frac{\partial(\sqrt{-g}\,)}{\partial g^{ij}}$$

<u>Attention</u> ! il faut changer d'indices (ij): $g^{ij}Q_{ij} \to g^{uv}Q_{uv}$ sinon le calcul sera faux car les indices (ij) sont fixés par ∂g^{ij}

$$\frac{\partial Q}{\partial g^{ij}} = \frac{1}{2\mu_0} F_{uk} F_{vm} \frac{\partial(g^{uv} g^{km})}{\partial g^{ij}}$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} F_{uk} F_{vm} \left(g^{km} \frac{\partial g^{uv}}{\partial g^{ij}} + g^{uv} \frac{\partial g^{km}}{\partial g^{ij}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\left(g^{km} \frac{\partial g^{uv}}{\partial g^{ij}} F_{uk} F_{vm} + g^{uv} \frac{\partial g^{km}}{\partial g^{ij}} F_{uk} F_{vm}\right)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\left(g^{km} \frac{\partial g^{ij}}{\partial g^{ij}} F_{ik} F_{jm} + g^{uv} \frac{\partial g^{ij}}{\partial g^{ij}} F_{ui} F_{vj}\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial g^{ij}} = \frac{1}{2\mu_0}\left(g^{km} F_{ik} F_{jm} + g^{uv} F_{ui} F_{vj}\right)$$

Comme F_{ij} est antisymétrique , il faut respecter la position quand on monte ou descend des indices.

$$\frac{\partial Q}{\partial g^{ij}} = \frac{1}{2\mu_0}(F_{ik} F_j{}^{k} + F_{ui} F^{u}{}_{j})$$

On change des indices sum dans $F_{ui} F^{u}{}_{j} \rightarrow F_{ki} F^{k}{}_{j}$

$$\frac{\partial Q}{\partial g^{ij}} = \frac{1}{2\mu_0}\left(F_{ik} F_j{}^{k} + F_{ki} F^{k}{}_{j}\right) = \frac{1}{2\mu_0}(2F_{ik} F_j{}^{k})$$

car on a la symétrie suivante: $F_{ki} F^{k}{}_{j} = F_{ik} F_j{}^{k}$:

$$F_{ki} F^{k}{}_{j} = -F_{ik} F^{k}{}_{j} = -F_{ik} g^{km} F_{mj} = F_{ik} g^{km} F_{jm} = F_{ik} F_j{}^{k}$$

Pour remplacer Q, il faut changer des indices (ij)→(st) : $g^{ij} g^{km} F_{ik} F_{jm} \rightarrow g^{st} g^{km} F_{sk} F_{tm}$ avant de remplacer dans l'expression car les (ij) ils sont fixes dans l'expression.

$$Q\frac{\partial(\sqrt{-g})}{\partial g^{ij}} = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ij}\right)\left(\frac{1}{2\mu_0} g^{st} g^{km} F_{sk} F_{tm}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ij} \frac{1}{2\mu_0} F_{sk} F^{sk}$$

et

$$\sqrt{-g}\frac{\partial Q}{\partial g^{ij}} = \frac{1}{2\mu_0}(2F_{ik} F_j{}^{k})\sqrt{-g}$$

finalement

$$U_{ij} = \frac{1}{2}\, g_{ij} \frac{1}{2\mu_0} F_{sk} F^{sk} - \frac{1}{\mu_0} (F_{ik} F_j{}^k)$$

$$U_{ij} = \frac{1}{\mu_0} (\frac{1}{4}\, g_{ij} F_{sk} F^{sk} + F_{ik} F^k{}_j)$$

C'est bien le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique.

Pour passer au contravariant on multiplie U_{ij} par $g^{iu}g^{jv}$

$$g^{iu} g^{jv} U_{ij} = \frac{1}{\mu_0} (\frac{1}{4}\, g^{iu} g^{jv} g_{ij} F_{sk} F^{sk} + g^{iu} g^{jv}\, F_{ik} F^k{}_j)$$

$$g^{iu} g^{jv} U_{ij} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{4}\, \delta_j^u g^{jv} F_{sk} F^{sk} + F^u{}_k F^{kv}\right)$$

$$U^{uv} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{4}\, g^{uv} F_{sk} F^{sk} + F^u{}_k F^{kv}\right)$$

Note: on a la symétrie suivante: $F^u{}_k F^{kv} = F^v{}_k F^{ku}$:

$$F^u{}_k F^{kv} = -F^u{}_k F^{vk} = -g_{km} F^{um} g^{kh} F^v{}_h = -\delta_m^h F^{um} F^v{}_h$$
$$= -F^v{}_m F^{um} = F^v{}_k\, F^{ku}$$

<u>Propriétés de</u> U_{ij} :

(a) Il est construit à partir de champ F_{ij}

(b) C'est un tenseur puisque g_{ij} et F_{ij} le sont

(c) Il est symétrique

$U_{ij} = U_{ji}$

$$F_{ik}F^{k}{}_{j} = -F_{ki}\, g^{km} F_{mj} = F^{m}{}_{i}F_{jm} = F_{jk}F^{k}{}_{i}$$

(d) U_{ij} est conservatif.

Pour les calculs on utilise les règles suivantes:

1¤ Le nombre d'indices montés = le nombre d'indices descendus.

2¤ F_{ij} est antisymétrique

3¤ On respecte la place des indices

Plaçons nous dans un repère normal

On a

$$U^{ij} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{4}\, g^{ij} F_{sm} F^{sm} + F^{i}{}_{s}F^{sj}\right)$$

$$\partial_i U^{ij} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{4}\partial_i(\, g^{ij} F_{sm} F^{sm}) + \partial_i(\, F^{i}{}_{s}F^{sj})\right)$$

$$2\mu_0\, \partial_i U^{ij} = \frac{1}{2}\partial_i(\, g^{ij} F_{sm} F^{sm}) + 2\, \partial_i(\, F^{i}{}_{s}F^{sj})$$

¤ Comme $\partial_i g^{ij} = 0$ on peut sortir g^{ij} de ∂_i

$$\frac{1}{2} g^{ij}\, \partial_i(\, F_{sm} F^{sm}) + 2F^{i}{}_{s}\, \partial_i F^{sj} + 2F^{sj}\, \partial_i F^{i}{}_{s}$$

on remplace $F^{k}{}_{s} = g^{ki} F_{is}$ et $g^{ki}\, \partial_k = \partial^{i}$

$$\frac{1}{2} \partial^{j}(\, F_{sm} F^{sm}) + 2F_{is}\, \partial^{i} F^{sj} + 2F^{sj}\, \partial_i F^{i}{}_{s}$$

on peut descendre/monter les deux indices (sm)

$F_{sm}\,\partial^j F^{sm} + F^{sm}\,\partial^j F_{sm} =$

$= F_{sm}\,\partial^j F^{sm} + F_{sm}\,\partial^j F^{sm} = 2F_{sm}\,\partial^j F^{sm}$

$2\mu_0\,\partial_i U^{ij} = F_{sm}\,\partial^j F^{sm} + 2F_{is}\,\partial^i F^{sj} + 2F^{sj}\,\partial_i F^i{}_s$

¤ On va occuper les deux premiers morceaux de droite

$F_{sm}\,\partial^j F^{sm} + F_{is}\,\partial^i F^{sj} + F_{is}\,\partial^i F^{sj}$

on change les indices pour avoir F_{sm} en facteur: (is)→(sm)
pour le dernier terme i→m

$= F_{sm}\,\partial^j F^{sm} + F_{sm}\,\partial^s F^{mj} + F_{ms}\,\partial^m F^{sj}$

$= F_{sm}\,\partial^j F^{sm} + F_{sm}\,\partial^s F^{mj} + F_{sm}\,\partial^m F^{js}$

$= F_{sm}\,(\partial^j F^{sm} + \partial^s F^{mj} + \partial^m F^{js})$

or la 1er équation de MAXWELL donne

$\partial^j F^{sm} + \partial^s F^{mj} + \partial^m F^{js} = 0$

finalement il nous reste

$2\mu_0\,\partial_i U^{ij} = 2F^{sj}\,\partial_i F^i{}_s$

$2\mu_0\,\partial_i U^{ij} = 2F_s{}^j\,\partial_i F^{is}$

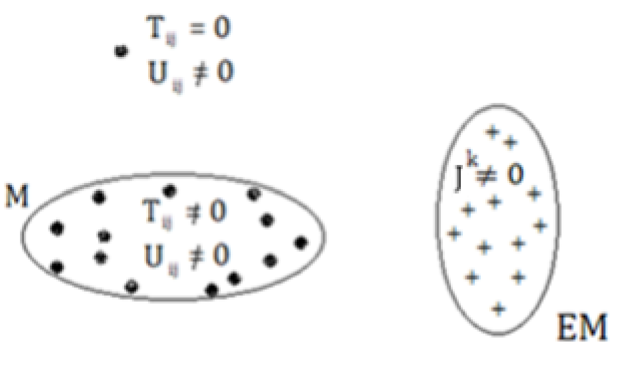
or la 2ième équation de MAXWELL $\partial_i F^{is} = \mu_0 J^s$ d'où

$2\mu_0\,\partial_i U^{ij} = 2F_s{}^j \mu_0 J^s$

$\partial_i U^{ij} = F_s{}^j\, J^s$

$\mathcal{D}_i U^{ij} = F_s{}^j J^s = 0$ (sans charge, dans le vide, $J^k = 0$)

U_{ij} est conservatif seulement dans le cas sans charge ($J^k = 0$, dans le vide)



6 L'ESPACE RIEMANNIEN

On dit qu'un espace est plat s'il existe un système de coordonnées cartésien (les axes sont des droites) ζ^k qui est valable en tout point de l'espace .

On démontre alors qu' un espace plat si et seulement si

$\forall M,\ R_{i\ ,pq}^{\ k}(M) = 0$;plat

Rappel : Pour une forme quadratique non-dégénérée q, on définit la signature de q de la façon suivante:

1) On montre qu'il existe une base orthogonale dans la quelle q est de la forme d'une somme de carrés.

$$q = \sum_i \pm a_i \left(x^i\right)^2$$

soient p=le nombre de signe "+", et m=le nombre de signe "-" (p+m = n = dim E• , car q est non-dégénéré)

2) On montre que p ne dépend pas de la base orthogonale

Par définition : La signature de q = sig (q) = (p,m)

6.1 L'ESPACE AFFINE IMPROPREMENT-EUCLIDIEN

On définit un espace affine improprement-euclidien $(\mathcal{V}, g_{ij})$ en se donnant un tenseur $\binom{0}{2}$ vérifiant :

1) $\forall M,\ R_{i\ ,pq}^{\ k}(M) = 0$;plat

2) g_{ij} de classe $\geq C^2$; $g_{ij}(x^0,x^1,x^2,x^3)$;tenseur métrique

3) $g_{ij} = g_{ji}$; symétrique

4) $\det(g_{ij}) \neq 0$; non-dégénéré

5) $\mathrm{sig}(g_{ij}) = (p,m) = (\pm\pm\pm\pm)$

Exemple : l'espace de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta_{ij})$

$s^2 = \eta_{ij}\, x^i x^j$

$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$; $x^0=ct$, $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$,

$\mathrm{sig}(\eta_{ij}) = (+---)$

c'est un espace improprement-euclidien.

6.2 UN ESPACE AFFINE EUCLIDIEN

Un espace affine euclidien ($\mathcal{V}$,g_{ij}) c'est la donnée un tenseur $\binom{0}{2}$ vérifiant :

1) $\forall$M, $R_{i\ ,pq}^{\ k}(M) = 0$; plat

2) g_{ij} de classe ≥ C^2 ; $g_{ij}(x^0,x^1,x^2,x^3)$

3) $g_{ij} = g_{ji}$; symétrique

4) $\det(g_{ij}) \neq 0$; non-dégénéré

5) $\mathrm{sig}(g_{ij}) = (4,0) = (++++)$

L'espace affine euclidien ⊂ l'espace affine improprement-euclidien .

6.3 L'ESPACE AFFINE IMPROPREMENT-RIEMANNIEN

1) $\exists$M , $R_{i\ ,pq}^{\ k}(M) \neq 0$; non-plat, courbe

2) g_{ij} de classe ≥ C^2 ; $g_{ij}(x^0,x^1,x^2,x^3)$

3) $g_{ij} = g_{ji}$; symétrique

4) $\det(g_{ij}) \neq 0$; non-dégénéré

5) $\mathrm{sig}(g_{ij}) = (p,m) = (\pm\pm\pm\pm)$

6.4 UN ESPACE AFFINE RIEMANNIEN

Un espace affine riemannien ($\mathcal{V}$,g_{ij}) c'est la donnée un tenseur g_{ij} $\binom{0}{2}$ vérifiant :

1) $\exists M$, $R_{i\ ,pq}^{\ k}(M) \neq 0$; courbe, non-plat

2) g_{ij} de classe ≥ C^2 ; $g_{ij}(x^0,x^1,x^2,x^3)$

3) $g_{ij} = g_{ji}$; symétrique

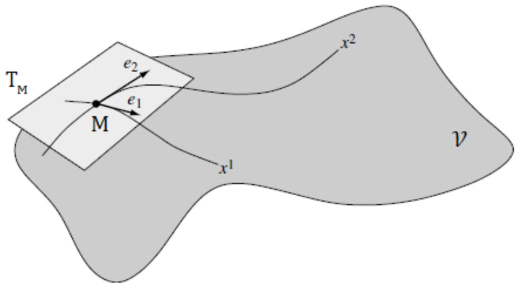
4) $\det(g_{ij}) \neq 0$; non-dégénéré

5) $\mathrm{sig}(g_{ij}) = (4,0) = (++++)$

L'espace affine riemannien ⊂ l'espace affine improprement-riemannien

En un point M de la variété $\mathcal{V}$, on associe deux espaces vectoriels euclidiens , l'espace euclidien tangent T_M en M et l'espace euclidien O_M osculatrice en M. Dans $\mathcal{V}$ on peut faire des calculs vectoriels (A^i+B^i) , et différentiels ($\partial_k A^i$, dA^i, ...)

Les calculs vectoriels se passent dans l'espace euclidien tangent T_M de $\mathcal{V}$ en M, et les calculs différentiels (dérivées,...) se passe dans l'espace euclidien osculatrice O_M de $\mathcal{V}$ en M.



L'espace tangent de T_M de $\mathcal{V}$ en M

Espace plat	Espace courbe
euclidien $\forall M, R^k_{i\ ,pq}(M) = 0$ sig = (4,0) = (++++)	riemannien $\exists M, R^k_{i\ ,pq}(M) \neq 0$ sig = (4,0) = (++++)
improprement-euclidien $\forall M, R^k_{i\ ,pq}(M) = 0$ sig = (p,m) = (±±±±) (Minkowski=sig(1,3)=(+---) Relativité Restreinte)	improprement-riemannien $\exists M, R^k_{i\ ,pq}(M) \neq 0$ sig = (p,m) = (±±±±) (Schwarzschild=sig(1,3)=(+---) Relativité Générale)

7 UNE MAGNIFIQUE INTEGRALE

On se donne un tenseur Λ_{ij} d'ordre 2 et 2 fois covariant $\binom{0}{2}$, Λ_{ij} peut contenir $\varkappa_0$, q, G, c, g^{ij}, $\partial_m g^{ij}$, ... On pose alors :

on pose alors :

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4} \;\; ; \;\; \Lambda = g^{ij}\Lambda_{ij} \;\; \text{et}$$

$$S_\Lambda = \chi \int \Lambda\sqrt{-g}\, d\Omega$$

On considère que les g^{ij}, et $\partial_m g^{ij}$ sont des variables de Λ, $\Lambda(g^{ij}, \partial_m g^{ij})$ et on veut calculer la variation δS_Λ de S_Λ par rapport à g^{ij} : δg^{ij}

$$\delta S_\Lambda = \chi \int \delta(\Lambda\sqrt{-g})\, d\Omega$$

Comme δ se comporte comme l'opérateur différentiel d alors on a :

$$\delta\left(\Lambda\sqrt{-g}\right) = \frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g}\,)}{\partial g^{ij}}\delta g^{ij} + \frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g}\,)}{\partial(\partial_m g^{ij})}\delta(\partial_m g^{ij})$$

on va remplacer le dernier morceau par deux autres en utilisant l'égalité ci-dessous et en remarquant que $\delta\partial_m = \partial_m\delta$ ça donne

$$\partial_m [\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial(\partial_m g^{ij})}\delta g^{ij}] = \partial_m [\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial(\partial_m g^{ij})}]\delta g^{ij} + [\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial(\partial_m g^{ij})}]\,\partial_m(\delta g^{ij})$$

$$[\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial(\partial_m g^{ij})}]\,\partial_m \delta(g^{ij}) = \partial_m [\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial(\partial_m g^{ij})}\delta g^{ij}] - \partial_m [\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial(\partial_m g^{ij})}]\delta g^{ij}$$

mais la 2ième intégrale est nulle

$$\int \partial_m [\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial(\partial_m g^{ij})}\delta g^{ij}]\, d\Omega = \int \partial_m [\sqrt{-g}\frac{\partial(\Lambda)}{\partial(\partial_m g^{ij})}\delta g^{ij}]\, d\Omega$$

$$= \int \partial_m [A^m\sqrt{-g}]d\Omega = \int A^m\sqrt{-g}dS_m = 0$$

(th : OSTROGRADSKI)

finalement ça donne :

$$\delta S_\Lambda = \chi \int \left[\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial g^{ij}} - \partial_m\left(\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial(\partial_m g^{ij})}\right)\right]\delta g^{ij}\, d\Omega$$

voilà un beau résultat, puis on pose par définition:

$$(7.1.1)\quad V_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial g^{ij}} - \partial_m\left[\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial(\partial_m g^{ij})}\right]\right)$$

d'où

$$(7.1.2)\quad \delta S_\Lambda = \chi \int -V_{ij}\sqrt{-g}\,\delta g^{ij}\, d\Omega$$

Cette intégrale est magique car elle nous permet d'injecter (à droite) V_{ij} dans l'équation tensorielle d'EINSTEIN !!

Le V_{ij} se nomme tenseur énergie-impulsion et le Λ_{ij} se nomme tenseur densité et le Λ la densité scalaire .

<u>Remarque</u> : V_{ij} est symétrique car g^{ij} l'est .

Donc on part de:

$$S_\Lambda = \chi \int \Lambda\sqrt{-g}\, d\Omega$$

où

$$\Lambda = g^{ij}\Lambda_{ij} \quad ; \ \Lambda_{ij} \ \text{est donné}$$

et on arrive à

ΛIl faut bien comprendre que si on calcule V_{ij} à partir de la relation (7.1.1) on est sûr de pouvoir injecter V_{ij} dans l'équation d'EINSTEIN grâce à l'intégrale (7.1.2) . La relation (7.1.1) est le seul moyen de justifier que V_{ij} est le tenseur énergie-impulsion.

Maintenant le plus gros problème c'est de choisir un tenseur densité Λ_{ij} , on choisira Λ_{ij} convenablement à nos avantages, que le calcul de (7.1.1) soit le plus simple possible.

* Pour la matière on choisira un Λ_{ij} sans contenir g^{ij} ni $\partial_m g^{ij}$ (les dérivées $\partial_m g^{ij}$ de g^{ij}) , dans ce cas on a alors les deux relations suivantes :

(7.1.3) $V_{ij} = \frac{1}{2}\Lambda g_{ij} - \Lambda_{ij}$

En effet :

$$V_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial g^{ij}} - \partial_m\left[\frac{\partial\left(\Lambda\sqrt{-g}\right)}{\partial(\partial_m g^{ij})}\right]\right)$$

Comme Λ_{ij} ne contient pas $\partial_m g^{ij}$, $\Lambda\sqrt{-g}$ non plus donc il nous reste :

$$V_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial g^{ij}}\right)$$

$$\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial g^{ij}} = \sqrt{-g}\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{ij}} + \Lambda\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{ij}}$$

Avant de remplacer $\Lambda = g^{ij}\Lambda_{ij}$ il faut changer les indices (ij) en (sm) car les indices (ij) sont fixe dans ∂g^{ij}.

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{ij}} = \frac{\partial(g^{sm}\Lambda_{sm})}{\partial g^{ij}} = \Lambda_{sm}\frac{\partial g^{sm}}{\partial g^{ij}} + g^{sm}\frac{\partial\Lambda_{sm}}{\partial g^{ij}}$$

Comme Λ_{ij} ne contient pas g^{ij}, il reste :

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{ij}} = \Lambda_{sm}\frac{\partial g^{sm}}{\partial g^{ij}}$$

g^{sm} ne contient pas g^{ij} sauf quand s=i et m=j d'où

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{ij}} = \Lambda_{ij}$$

d'autre part on a (à connaitre par coeur) :

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{ij}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ g_{ij}$$

finalement :

$$-\sqrt{-g}\,V_{ij} = \sqrt{-g}\,\Lambda_{ij} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\;\Lambda\,g_{ij}$$

$$V_{ij} = \frac{1}{2}\Lambda\,g_{ij} - \Lambda_{ij}$$

(7.1.4) $V = \Lambda$

où $V = g^{ij}V_{ij}$

En effet , de

$$V_{ij} = \frac{1}{2}\Lambda\,g_{ij} - \Lambda_{ij}$$

ça donne

$$g^{ij}\,V_{ij} = \tfrac{1}{2}\Lambda\,g_{ij}\,g^{ij} - g^{ij}\,\Lambda_{ij}\ ;\ (g_{ij}\,g^{ij} = 4)$$

$$V = \frac{4}{2}\Lambda - \Lambda = \Lambda$$

* Pour le champ électromagnétique on choisira un Λ_{ij} sans contenir les dérivées $\partial_m g^{ij}$ de g^{ij} .

Suivant on est en présence de la matière ou du champ électromagnétique (ou les deux) on aura un tenseur énergie-impulsion pour la matière ou un tenseur énergie-impulsion pour le champ électromagnétique (ou les deux).

8 L'EQUATION TENSORIELLE D'EINSTEIN

On retrouve l’équation tensorielle d’EINSTEIN à partir du principe de moindre action.

L'action du système doit être de la forme:

$$S = \int K\sqrt{-g}\, d\Omega$$

où K est un scalaire.

Et on obtient l'équation par le principe de moindre action, càd:

$\delta S = 0$; variation sur g^{ij} : δg^{ij}

L'action S sera composée de deux termes :

* S_R : action du champ de gravitation

* S_Λ : action pour la matière

8.1 L'ACTION DU CHAMP DE GRAVITATION

Pour l'action du champ de gravitation S_R , on va prendre :

$$S_R = \int R\sqrt{-g}\, d\Omega$$

$R = g^{ij} R_{ij}$; R_{ij} = tenseur de RICCI

Allons-y :

Calculons la variation δS_R par rapport à δg^{ij}

$$\delta S_R = \int \delta(R\sqrt{-g})\, d\Omega$$

$$= \int \delta(g^{ij} R_{ij} \sqrt{-g})\, d\Omega$$

$$\delta S_R = \int \delta(g^{ij}) R_{ij} \sqrt{-g}\, d\Omega \quad (1)$$

$$+ \int g^{ij}\, \delta(R_{ij}) \sqrt{-g}\, d\Omega \ (2)$$

$$+ \int g^{ij} R_{ij}\, \delta(\sqrt{-g})\, d\Omega \quad (3)$$

δS_R donne 3 intégrales, on garde la (1) parce qu'on a déjà le δg^{ij}

Pour (3) :

$$\delta\left(\sqrt{-g}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\; g_{ij}\; \delta g^{ij}$$

Pour $g^{ij}R_{ij}$, il faut changer des indices (ij): $g^{ij}R_{ij} \rightarrow g^{km}R_{km}$ car les indices (ij) sont fixes par δg^{ij} dans l'intégrale :

$$\int -\frac{1}{2} g_{ij}\; g^{km}\, R_{km} \sqrt{-g}\;\; \delta g^{ij}\; d\Omega$$

$$\int -\frac{1}{2} R g_{ij}\; \sqrt{-g}\; \delta g^{ij}\; d\Omega$$

Maintenant calculons l'intégrale (2) c'est le plus dur !!

Rappelons d'abord le R_{ij}

$$R_{ij} = \partial_m \Gamma_{ij}^m + \Gamma_{ij}^p\; \Gamma_{pm}^m - \partial_j \Gamma_{im}^m - \Gamma_{im}^p\; \Gamma_{pj}^m$$

Puis plaçons nous dans un repère normal, là les $\Gamma_{ij}{}^k$ sont nuls donc il nous reste

$$R_{ij} = \partial_m \Gamma_{ij}{}^m - \partial_j \Gamma_{im}{}^m$$

$$\delta R_{ij} = \delta(\partial_m \Gamma_{ij}{}^m - \partial_j \Gamma_{im}{}^m) = \partial_m (\delta\Gamma_{ij}{}^m) - \partial_j (\delta\Gamma_{im}{}^m)$$

Comme les $\Gamma_{ij}{}^k$ sont nuls , la dérivée partielle ∂_m est égale à la dérivée covariante $\mathcal{D}_m$ c'est-à-dire $\partial_m = \mathcal{D}_m$, d'où

$$\delta R_{ij} = \mathcal{D}_m (\delta\Gamma_{ij}{}^m) - \mathcal{D}_j(\delta\Gamma_{im}{}^m)$$

$$\sqrt{-g}\, g^{ij}\, \delta R_{ij} = \sqrt{-g}\, [\, g^{ij}\mathcal{D}_m(\delta\Gamma_{ij}{}^m) - g^{ij}\mathcal{D}_j(\delta\Gamma_{im}{}^m)\,]$$

comme $\mathcal{D}_m g^{ij} = 0$ (th: Ricci) , on peut donc rentrer les g^{ij} dans $\mathcal{D}_m$

$= \sqrt{-g}\ [\ \mathcal{D}_m (g^{ij}\ \delta\Gamma_{ij}{}^m) - \mathcal{D}_j (g^{ij}\ \delta\Gamma_{im}{}^m)\ ]$

On veut mettre $\mathcal{D}_m$ en facteur donc on change m -> k dans $\Gamma_{im}{}^m$ et j->m dans $\mathcal{D}_j$ ça donne

$\sqrt{-g}\ g^{ij}\ \delta R_{ij} = \sqrt{-g}\ [\ \mathcal{D}_m(g^{ij}\ \delta\Gamma_{ij}{}^m) - \mathcal{D}_m(g^{im}\ \delta\Gamma_{ik}{}^k)\ ]$

$= \sqrt{-g}\ [\ \mathcal{D}_m (g^{ij}\ \delta\Gamma_{ij}{}^m - g^{im}\ \delta\Gamma_{ik}{}^k)\ ]$

$\sqrt{-g}\ g^{ij}\ \delta R_{ij} = \sqrt{-g}\ \mathcal{D}_m A^m$ avec $A^m = g^{ij}\ \delta\Gamma_{ij}{}^m - g^{im}\ \delta\Gamma_{ik}{}^k$

en appliquant la formule d'OSTROGRADSKI cette intégrale (2) est nulle (la variation sur le bord est nulle).

$$\int g^{ij}\,\delta R_{ij}\sqrt{-g}\,d\Omega = \int \sqrt{-g}\,\mathcal{D}_m A^m\,d\Omega = \int \sqrt{-g}\,A^m\,dS_m$$
$$= 0$$

Finalement on a un très beau résultat : $\delta S_R = (1)+(2)+(3)$ vaut

$$\delta S_R = \int (R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij})\sqrt{-g}\ \delta g^{ij}\,d\Omega$$

L'intégrale $\int \delta R_{ij}$ est nulle ça vient vraiment du miracle !!

car $\delta(R_{ij})$ n'est pas nul , R_{ij} contient des g^{ij}

8.2 L'ACTION POUR LA MATIERE

Il faut maintenant trouver l'action S_Λ de la matière.

Ici aussi on considère que la matière M qui engendre le champ gravitationnel est un système isolé et en mouvement comme un fluide de poussière avec une vitesse

$$u_i = c\frac{dx_i}{ds}$$

dans ce cas on suit alors la même recette , on va prendre :

$$S_\Lambda = \chi \int \Lambda\sqrt{-g}\,d\Omega$$

où

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$$

$\Lambda = g^{ij}\Lambda_{ij}$

Mais le plus gros problème c'est qu'on ne sait pas quoi prendre comme densité Λ_{ij} contrairement pour le champ on a pris le tenseur de Ricci R_{ij} comme densité . Beaucoup de livres et des articles zappent sur cette question.

Nous, on va prendre :

$$(8.2.1)\quad \Lambda_{ij} = \frac{1}{2}\varkappa_0 c^2 g_{ij} - \varkappa_0 u_i u_j$$

où $\varkappa_0$ désigne la distribution propre de la matière M.

→On peut remarquer que dans Λ_{ij} il n'y a pas de g^{ii} ni ∂g^{ij} .

En relativité générale on travaille dans un espace improprement-riemannien $(\mathcal{V}, g_{ij})$ avec

$\mathcal{V}$ = variété ⟹ la donné des x^i donc des dx_i , dx^j

la métrique de $\mathcal{V}$ ⟹ $ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$.

donc tout est donné, on a tout !!

Calculons la variation δS_Λ de S_Λ par rapport à δg^{ij}

Allons y :

<u>Méthode 1</u> :

On a déjà calculer δS_Λ elle vaut :

$$\delta S_\Lambda = \chi \int \left[\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g}\,)}{\partial g^{ij}} - \partial_m \left(\frac{\partial\left(\Lambda\sqrt{-g}\,\right)}{\partial(\partial_m g^{ij})}\right)\right] \delta g^{ij}\, d\Omega$$

càd :

$$\delta S_\Lambda = \int -\chi T_{ij} \sqrt{-g}\, \delta g^{ij}\, d\Omega$$

<u>Méthode 2</u> :

$$S_\Lambda = \chi \int \Lambda\sqrt{-g}\, d\Omega$$

$$\delta S_\Lambda = \chi \int \delta(\Lambda\sqrt{-g})\, d\Omega$$

Voyons que vaut $\delta(\Lambda\sqrt{-g})$:

$$\delta(\Lambda\sqrt{-g}) = \delta(\Lambda)\sqrt{-g} + \Lambda\delta(\sqrt{-g})$$

Λ_{ij} ne contient pas des $\partial_m g^{ij}$ donc $\Lambda = g^{ij}\Lambda_{ij}$ ne contient pas non plus des $\partial_m g^{ij}$, d'où :

$$\delta(\Lambda) = \frac{\partial\Lambda}{\partial g^{ij}}\delta g^{ij} = \frac{\partial(g^{km}\Lambda_{km})}{\partial g^{ij}}\delta g^{ij}$$

$$= \Lambda_{km} \frac{\partial(g^{km})}{\partial g^{ij}}\delta g^{ij} + g^{km}\frac{\partial(\Lambda_{km})}{\partial g^{ij}}\delta g^{ij}$$

et Λ_{ij} ne contient pas g^{ij} ça donne

$$= \Lambda_{km} \frac{\partial(g^{km})}{\partial g^{ij}}\delta g^{ij}$$

$$= \Lambda_{ij}\delta g^{ij}$$

$$\delta(\Lambda) = \Lambda_{ij}\ \delta g^{ij}$$

$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ g_{ij}\ \delta g^{ij}$ (formule à savoir)

donc

$$\delta(\Lambda\sqrt{-g}) = \Lambda_{ij}\ \delta g^{ij}\sqrt{-g} + \Lambda(-\frac{1}{2})g_{ij}\sqrt{-g}\,\delta g^{ij}$$

$$\delta(\Lambda\sqrt{-g}) = (\Lambda_{ij} - \frac{1}{2}\Lambda g_{ij})\sqrt{-g}\,\delta g^{ij}$$

Or:

$$\varkappa_0 u_i u_j = T_{ij}$$

d'où

$$g^{ij} T_{ij} = T = \varkappa_0 g^{ij} u_i u_j = \varkappa_0 u^i u_i = \varkappa_0 c^2$$

la relation (7.2.1) devient

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2} T g_{ij} - T_{ij}$$

comme $\Lambda = T$ (4.1.2) , on a

$$\Lambda_{ij} - \frac{1}{2} \Lambda g_{ij} = -T_{ij}$$

d'où

$$\delta S_\Lambda = \int - \chi T_{ij} \sqrt{-g}\, \delta g^{ij}\, d\Omega$$

Wow ... c'est magnifique non ? on a pu injecter T_{ij} dans l'équation d'EINSTEIN !!

On peut calculer δS_Λ par une autre méthode:

<u>Méthode</u> 3:

$$S_\Lambda = \chi \int \Lambda \sqrt{-g}\, d\Omega$$

$$\delta S_\Lambda = \chi \int \delta\left(g^{ij} \Lambda_{ij} \sqrt{-g}\right) d\Omega$$

$$= \chi \int \delta(g^{ij})\, \Lambda_{ij} \sqrt{-g}\, d\Omega \ (1)$$

$$+\chi \int g^{ij}\,\delta(\Lambda_{ij})\,\sqrt{-g}\,d\Omega \ (2)$$

$$+\chi \int g^{ij}\,\Lambda_{ij}\ \delta\left(\sqrt{-g}\right)d\Omega \ (3)$$

Note: L'opérateur de variation δ se comporte comme la différentielle d, et on a δd = dδ ces opérateurs commutent.

δS_Λ donne 3 intégrales, on garde la (1) parce qu'on a déjà le δg^{ij}

Pour (2) on a:

$$\delta(\Lambda_{ij}) = \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial g^{kh}}\delta g^{kh} + \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial(\partial_m g^{kh})}\delta(\partial_m g^{kh})$$

mais $\frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial g^{kh}} = \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial(\partial_m g^{kh})} = 0$ car Λ_{ij} ne contient pas les g^{ij} ni les dérivées $\partial_m g^{ij}$ de g^{ij} , $\Longrightarrow \delta(\Lambda_{ij})=0$ et finalement l'intégrale (2) est nulle.

Pour (3) :

On a déjà calculé:

$\delta\left(\sqrt{-g}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{ij}\ \delta g^{ij}$ (formule à savoir)

On change les indices (ij): $g^{ij}\Lambda_{ij} \rightarrow g^{km}\Lambda_{km}$ car ils sont fixes dans l'intégrale

soit

$$(3) = \chi \int -\frac{1}{2}\,g^{km}\,\Lambda_{km}\sqrt{-g}\,g_{ij}\ \delta g^{ij}\,d\Omega$$

$$(3) = \chi \int -\frac{1}{2}\Lambda\sqrt{-g}\,g_{ij}\;\delta g^{ij}\,d\Omega$$

$$(1) + (3) \;=\; \chi \int (\Lambda_{ij} - \frac{1}{2}\Lambda g_{ij})\sqrt{-g}\,\delta g^{ij}\;d\Omega$$

Finalement δS_Λ = (1)+(2)+(3) vaut

$$\delta S_\Lambda \;= \int -\chi T_{ij}\sqrt{-g}\,\delta g^{ij}\;d\Omega$$

On trouve bien la même expression.

$S = S_R + S_\Lambda$

$\delta S = 0$

ça donne $\delta(S_R + S_\Lambda) = 0$ (principe de moindre action)

$\delta S_R + \delta S_\Lambda = 0$

$$\int (R_{ij} - \tfrac{1}{2} R g_{ij})\,\sqrt{-g}\;\delta g^{ij}\;d\Omega + \int -\chi T_{ij}\,\sqrt{-g}\,\delta g^{ij}\;d\Omega = 0$$

$$\int (R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} - \chi T_{ij})\,\sqrt{-g}\;\delta g^{ij}\,d\Omega \;=\; 0$$

cette intégrale vaut zéro quelle que soit la variation δg^{ij} donc

$$(R_{ij} - \tfrac{1}{2} R g_{ij} - \chi T_{ij})\sqrt{-g} = 0$$

c'est-à- dire

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \;= \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

comme

$\mathcal{G}_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}$; tenseur gravitationnel

d'où l'équation tensorielle d'EINSTEIN :

$$\mathcal{G}_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

Le T_{ij} est le membre de droite de l'équation d'EINSTEIN, donc c'est bien le tenseur énergie-impulsion de la matière. Sans tous ces calculs il n'est pas évident d'injecter
$T_{ij} = \varkappa_0 u_i u_j$
dans l'équation tensorielle d'EINSTEIN.

<u>Remarque</u> :

On peut écrire l'équation d'EINSTEIN d'une autre façon:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

$$g^{ij} (R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \, g^{ij}$$

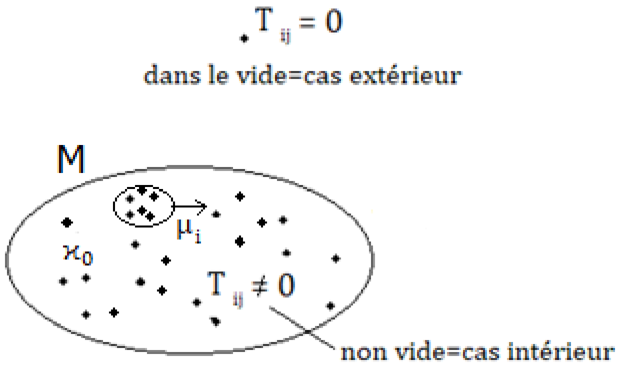
$$g^{ij} R_{ij} - \frac{1}{2} R \, g_{ij} \, g^{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \, g^{ij}$$

$$R - \frac{4}{2} R = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

$$R = - \frac{8\pi G}{c^4} T$$

soit $R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij})$

donc s'il n'y a pas de matière, dans le vide $T_{ij} = 0$ (et $T=R=0$) on a $R_{ij} = 0$.



8.3 L'ACTION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

En présence du champ électromagnétique F_{ij}

L'action du champ électromagnétique sera :

$$S_Q = \chi \int Q\sqrt{-g}\, d\Omega$$

$Q = g^{ij}Q_{ij}$

$$Q_{ij} = \frac{1}{2\mu_0} g^{km} F_{ik} F_{jm} \quad \text{(dans le vide, sans charge: } J^k = 0\text{)}$$

$F_{ij} = [\mathcal{D}_i A_j] = \mathcal{D}_i A_j - \mathcal{D}_j A_i = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ (dans un repère normal)

ce qui donne sa variation

$$\delta S_Q = \chi \int \left[\frac{\partial(Q\sqrt{-g})}{\partial g^{ij}} - \partial_m \left(\frac{\partial(Q\sqrt{-g})}{\partial(\partial_m g^{ij})} \right) \right] \delta g^{ij} d\Omega$$

càd :

$$\delta S_Q = \int -\chi U_{ij} \sqrt{-g}\, \delta g^{ij}\, d\Omega$$

Cette égalité permet d'injecter U_{ij} dans l'équation d'EINSTEIN, et elle devient:

$$\mathcal{G}_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{ij} + U_{ij})$$

finalement on a trois belles actions :

$S_R = \int R\sqrt{-g}\, d\Omega$ pour le champ gravitationnel

$S_\Lambda = \chi \int \Lambda\sqrt{-g}\, d\Omega$ pour la matière

$S_Q = \chi \int Q\sqrt{-g}\, d\Omega$ pour le champ électromagnétique

qui ont une structure très semblables.

Soit X_{ij} un tenseur, si on veut l'injecter dans l'équation tensorielle d'EINSTEIN càd avoir :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} X_{ij}$$

il n'y a qu'une seule façon de le faire :

Trouver un Λ_{ij} (ce qui n'est pas évident) tel que:

$$X_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial g^{ij}} - \partial_m \left[\frac{\partial\left(\Lambda\sqrt{-g}\right)}{\partial(\partial_m g^{ij})} \right] \right)$$

où $\Lambda = g^{ij}\Lambda_{ij}$

Si on regarde de plus près la démonstration de l'équation d'EINSTEIN on peut admirer la nature, car elle fait tout exactement pour que ça marche !

Remarque :

1. Pour la matière on a choisir Λ_{ij} tel que $\delta(\Lambda_{ij}) = 0$ donc $\int \delta(\Lambda_{ij}) = 0$ mais l'intégrale $\int \delta(R_{ij}) = 0$ provient du miracle car R_{ij} contient des g^{ij}, il faut l'existence des théorèmes comme théorème de Ricci, théorème d'OSTROGRADSKI etc.... pour avoir $\int \delta(R_{ij}) = 0$!!

2. Une chose très importante on a $\Lambda = T$, sans cette relation on est coincé !!

3. Il faut noter que dans les actions S_R, S_Λ et S_Q il faut que R, Λ et Q soient scalaires (invariants par changement de référentiel) .

Pour R, on a la relation

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

$$g^{ij} R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} g^{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} g^{ij} T_{ij}$$

$$R - \frac{4}{2} R = \frac{8\pi G}{c^4} T \quad ; \; g_{ij} g^{ij} = 4$$

$$R = -\chi T = -\frac{8\pi G}{c^2} \varkappa_0$$

Pour Λ, on a $\Lambda = T$. On a déjà calculé T, voici une autre façon de calculer T .

On a :

$T^{ij} = \varkappa_0 u^i u^j$

or

$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j \rightarrow 1 = g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \rightarrow \varkappa_0 c^2 = g_{ij}\, \varkappa_0 c^2 \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}$

$\varkappa_0 c^2 = g_{ij} T^{ij} = T = \Lambda$

Ce qui montre bien que Λ est invariant par changement de repère puisque $\varkappa_0$ et c sont invariants.

finalement:

$$R = -\frac{8\pi G}{c^2} \varkappa_0$$

$\Lambda = \varkappa_0 c^2$

$$Q = \frac{1}{\mu_0} \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right)$$

Que des scalaires donc invariant par changement du repère

4. Il faut bien comprendre que le tenseur énergie-impulsion de la matière T_{ij} est par définition donné par la relation (4.1.1), quant à :

$$T_{ij} = \varkappa_0 u_i u_j$$

c'est ce qu'on a trouvé après la définition, mais ce n'est pas la définition !! en effet si on prend

$$T_{ij} = \varkappa_0 u_i u_j$$

comme définition, on ne voit pas comment on arrive à

$$\mathcal{G}_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \ ???$$

Ce tenseur T_{ij} possède toutes les propriétés requises: symétrique, conservatif etc....

5. Le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique sans charge (dans le vide, là où on est il n'y a pas de charge) U_{ij} est par définition donné par la relation (5.1.1), quant à :

$$U_{ij} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{4} g_{ij} F_{sk} F^{sk} + F_{ik} F^{k}{}_{j} \right)$$

c'est ce qu'on a trouvé après la définition, mais ce n'est pas la définition !! en effet si on prend

$$U_{ij} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{4} g_{ij} F_{sk} F^{sk} + F_{ik} F^{k}{}_{j} \right)$$

comme définition, on ne voit pas comment on arrive à

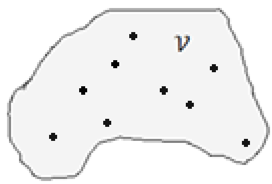
$$\mathcal{G}_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} U_{ij} \;???$$

Là aussi ce tenseur U_{ij} possède toutes les propriétés requises: symétrique, conservatif etc....

9 REMARQUE SUR LA VARIETE

<u>Remarque</u> : On peut définir directement une variété sans la plonger dans l'espace affine $E^{\bullet}$, il suffit de se donner $\mathcal{V}$, x^i, et g_{ij} .

1→ Une variété de dimension n, $\mathcal{V}$ est un ensemble de points



Muni un système de repérage de tous ses points, c'est à dire la donnée d'une fonctions f de classe ≥ C^2 de $D\subset\mathbb{R}^n\rightarrow\mathcal{V}$ telle que:

$f: D\subset\mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}$

$(x^0,x^1,x^2,\ldots ,x^{n-1}) \rightarrow f(x^0,x^1,x^2,\ldots,x^{n-1}) = f(x^i) = M\in\mathcal{V}$

$f(x^0,x^1,x^2,\ldots,x^{n-1}) = M(x)$

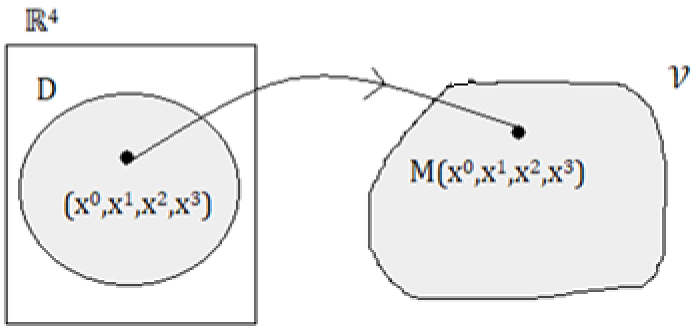
de plus on demande que $f(x^i)$ soit bijective sur le domaine $D \leftrightarrow \mathcal{V}$

On dit que $(x^i)_i$ en abrégé x^i un système de coordonnées (curvilignes) de $\mathcal{V}$.

On dit que $\mathcal{V}$ est paramétrée par f mais par abus de langage on dit que $\mathcal{V}$ est paramétré par le système de coordonnées x^i .

Les points de $\mathcal{V}$ sont décrits par la fonction f. Quand $(x^0,x^1,x^2,...,x^{n-1})$ décrit D, le point $M(x^0,x^1,x^2,...,x^{n-1})$ décrit $\mathcal{V}$.

n=4



Donc une variété $\mathcal{V}$, est la donnée d'un ensemble de points et un système de coordonnées x^i sur $\mathcal{V}$.

<u>Attention</u> !! C'est simplement une bijection entre les points de D et $\mathcal{V}$, il n'y a aucune structure sur $\mathcal{V}$!!

2→ Ensuit on munit sur $\mathcal{V}$ une forme quadratique ds^2 :

$ds^2 = g_{ij}\, x^i\, x^j$

où g_{ij} vérifie :

1) g_{ij} de classe ≥ C^2 ; $g_{ij} = g_{ij}(x)$, $x=(x^0,x^1,x^2,\dots,x^{n-1})$

2) Symétrique : $g_{ij} = g_{ji}$

3) Non-dégénéré : $\det(g_{ij}) \neq 0$

4) $sig(g_{ij}) = (p,m)$;p=nombre de ‘+’, m=nombre de ’-‘

le ds^2 , on nomme « la métrique de $\mathcal{V}$ »

le g_{ij} , le tenseur métrique de $\mathcal{V}$

On notera $(\mathcal{V},g_{ij})$ ou $(\mathcal{V},ds^2)$

Comme g_{ij} est non-dégénérée on pose

$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$; l'inverse de (g_{ij})

$\det(g_{ij}) = g$

(g^{ij}) est l'inverse de (g_{ij})

On a la formule suivante

$$g^{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\det(\widehat{g_{ji}})}{g}$$

($\widehat{g_{uv}}$) la matrice (g_{ij}) dont on a supprimé la ligne u et le colonne v.

3→ Puis en chaque point M de $\mathcal{V}$ on attache deux espaces euclidiens , l'espace tangente T_M (pour les opérations '+,-,x, contraction...') et l'espace osculatrice O_M (pour les dérivées...)

Une fois qu'on a g_{ij} , T_M, O_M on peut faire tout le calcul tensoriel sur $\mathcal{V}$ comme dans une variété plongée dans un espace affine euclidien.

→On définit $\Gamma_{ij}{}^k$ par :

* $\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{km} (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij})$

* $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ij}{}^m g_{mk}$

→<u>Les dérivées covariantes par</u> :

* $\mathcal{D}_k A^i \stackrel{\text{def}}{=} \partial_k A^i + \Gamma_{km}^{i} A^m$ (déf=par définition)

$\mathcal{D}_k A^i$ dérivée covariante de A^i

* $\mathcal{D}_k A_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial_k A_i - \Gamma_{ki}^{m} A_m$

$\mathcal{D}_k A_i$ dérivée covariante de A_i

Pour les tenseurs d'ordre deux :

* $\mathcal{D}_k A^{ij} = \partial_k A^{ij} + \Gamma_{km}^{i} A^{mj} + \Gamma_{km}^{j} A^{im}$; on dérive (k,i) puis (k,j)

* $\mathcal{D}_k A_{ij} = \partial_k A_{ij} - \Gamma_{ki}^{m} A_{mj} - \Gamma_{kj}^{m} A_{im}$; (k,i) puis (k,j)

* $\mathcal{D}_k A^i{}_j = \partial_k A^i{}_j + \Gamma^i_{km} A^m{}_j - \Gamma^m_{kj} A^i{}_m$; (k,i) puis (k,j)

Plus généralement

* $\mathcal{D}_k A^p_{ij} = \partial_k A^p_{ij} + \Gamma^p_{km} A^m_{ij} - \Gamma^m_{ki} A^p_{mj} - \Gamma^m_{kj} A^p_{im}$

→On pose par définition le tenseur de courbure par :

$R_{i\ ,pq}^{\ k} \overset{\text{def}}{=} \partial_p \Gamma^k_{qi} + \Gamma^m_{qi}\ \Gamma^k_{pm} - \partial_q \Gamma^k_{pi} - \Gamma^m_{pi}\ \Gamma^k_{qm}$

Avec g_{i} , $\Gamma_{ij}{}^k$, $\mathcal{D}_k$, ds on peut faire tous les calculs tensoriels sur la variété $\mathcal{V}$.

→On démontre que, la variété est plat si et seulement

si :

$\forall M,\ R_{i\ ,pq}^{\ k}(M) = 0$;plat

« l'objet » $R_i{}^k{}_{,pq}$ n'est pas évident à trouver.

<u>NOTE</u> : Par définition on dit qu'un espace est plat s'il existe un système de coordonnées cartésien (les axes sont des droites) ζ^k qui est valable en tout point de l'espace .

<u>Pour résumer</u> :

Une variété $\mathcal{V}$ est un ensemble de points disposé un système de coordonnés curvilignes x^i.

En chaque point M de $\mathcal{V}$ on attche deux espaces euclidiens T_M et O_M

sur $\mathcal{V}$ on munit une métrique $ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$

où g_{ij} vérifie :

1) g_{ij} de classe $\geq C^2$; $g_{ij} = g_{ij}(x)$, $x=(x^0,x^1,x^2,\ldots,x^{n-1})$

2) Symétrique : $g_{ij} = g_{ji}$

3) Non-dégénéré : $\det(g_{ij}) \neq 0$

Variété $(\mathcal{V},g_{ij})$

<u>Commentaire</u> :

En chaque point de $\mathcal{V}$ on a une forme bilinaire symétrique non-dégénérée $g(u,v)$

$g : T_M \rightarrow \mathbb{R}$

$(u,v) \rightarrow g(u,v) \in \mathbb{R}$

on pose

$g_{ij} = g(e_i,e_j)$ où $\{e\}_i$ une base de T_M

donner $g(u,v)$ revient à donner les coefficients g_{ij}

Comme g_{ij} dépends le point M càd x on a donc $g_{ij}(x)$, il y a une grande différence entre $g(u,v)$ et $g_{ij}(x)$.

SOMMAIRE

Du même auteur

¤*1 La conjecture de Fermat*

C'est un livre qui démontre la conjecture de Fermat, (appelé souvent "le dernier théorème de Fermat") en s'appuyant sur deux théorèmes: le théorème de Ribet et le théorème de Wiles. Un document rare et exceptionnel.

© Juin-2015, Morphocode CODE

¤*2 La Relativité Générale*

Tout sur la Relativité Générale et on trouve une démonstration de l'équation tensorielle d'Einstein à partir du principe moindre action, ce qui est très rare.

© Décembre-2016, Morphocode CODE

¤*3 Le Groupe du Rubik's Cube (Tome I, II)*

Le Rubik's Cube possède un groupe très riche en propriétés et si la partie mathématique du puzzle vous intéresse alors ce livre est pour vous.

© Mars-2017, Morphocode CODE

¤*4 La Relativité Restreinte*

La Relativité Restreinte est une théorie physique proposée par Einstein pour remplacer la mécanique newtonienne quand la vitesse des objets est proche à celle de la lumière c.

© Novembre-2017, Morphocode CODE

¤5 *La chasse aux nombres transcendants (Tome I, II)*

Les nombres transcendants sont très mystérieux, ils sont partout, beaucoup plus nombreux que les nombres algébriques et pour tant on connaît très peu de ces nombres, le premier est e, puis π, cos(1) , ...

¤6 *La Cubologie (Tome I, II)*

Pour comprendre les propriétés des twists il faut passer par les mathématiques, à chaque twist on associe un groupe et ce sont des propriétés de ce groupe qui expliquent les propriétés du twist.

¤7 *La physique quantique (Tome I, II)*

Si vous voulez savoir ce que c'est la physique quantique , ce livre est pour vous.